Preferences and Opportunity Set

ผศ.ดร. วีระชาติ กิเลนทอง
มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

Main Issues

- Opportunity set และ Preferences คืออะไร ทำไมจึงมีความสำคัญกับการตัดสินใจทางเศรษฐศาสตร์
- ความสัมพันธ์ระหว่างการเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ที่เหมาะสม (optimal portfolio) กับ Preferences ของนักลงทุน

The Limits to Choice

หลักของความขาดแคลน (scarcity principle)

- ข้อจำกัดของตัวเลือก (limits to choice) ที่ตัวแทนทางเศรษฐกิจต้องเผชิญกับข้อจำกัดของสิ่งที่ตนเลือกได้ตลอดเวลา
  - ผู้บริโภคสามารถเลือกบริโภคสินค้าที่ตนมีงบประมาณพอที่จะซื้อได้ (affordable) เท่านั้น (budget constraint)
  - นักลงทุนสามารถเลือกลงทุนใดๆ ก็ได้ในสินทรัพย์ที่เกิดขึ้นได้

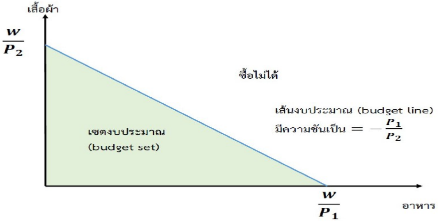
The Limits to Choice

ยกตัวอย่าง

- สินค้าที่หนึ่งคือ อาหาร (ราคา P_1 บาท) และสินค้าที่สองคือ เสื้อผ้า (ราคา P_2 บาท)
- หากเราซื้ออาหารมากขึ้น เราก็จำเป็นจะต้องลดปริมาณเสื้อผ้าลง เพราะเรามีงบประมาณที่จำกัด (w บาท) ซึ่งเป็นไปตามแบบจำลองงบประมาณ (budget model)

$$P_1x_1 + P_2x_2 \leq W \tag{1}$$

เมื่อ อาหารคือ x_1 และ เสื้อผ้าคือ x_2



- ในช่องสีเทา บางครั้งเราเรียกว่า `` opportunity set''

The Limits to Choice

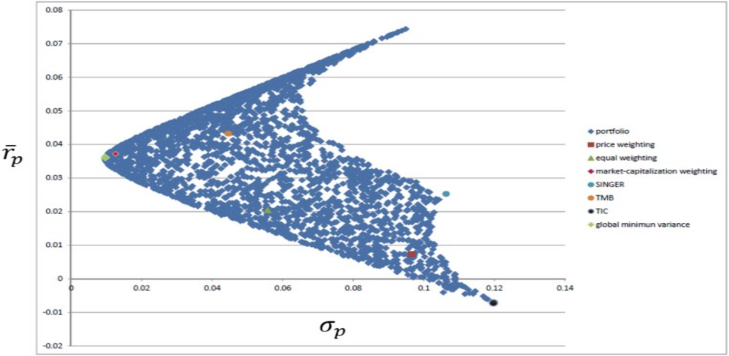
ตัวอย่าง

- มี 3 หลักทรัพย์ ประกอบด้วย SINGER, TMB และ TC โดยมีผลตอบแทนเฉลี่ยคือ $\bar{r}_i$ และ ความแปรปรวนร่วมของแต่ละหลักทรัพย์ คือ $\sigma_{i,j}$ เมื่อกำหนด $i, j \in \{\text{SINGER}, \text{TMB}, \text{TC}\}$
- โดยรูปนี้ ให้แกน x คืออัตราผลตอบแทนเฉลี่ยจากการลงทุน และ แกน y คือ ความเสี่ยงจากการลงทุน
- นักลงทุนเลือกที่จะลงทุนด้วยสัดส่วนแบบใดก็ได้ในหลักทรัพย์ทั้ง 3 นี้หรือลงทุนได้ในส่วนที่อยู่ในรูป (opportunity set) เท่านั้น

The Limits to Choice

$$\text{opportunity set} = \{(\bar{r}_p, \sigma_p) | \bar{r}_p = \sum_i x_i \bar{r}_i \text{ and } \sigma_p^2 = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{i,j}\} \quad (2)$$

เมื่อกำหนด $\sum_I x_i = 1$



The Limits to Choice

- จากตัวอย่างทั้ง 2 สะท้อนถึงหลักการได้อย่างเสียอย่าง (trade-off)
- ทุกครั้งที่ผู้บริโภคหรือนักลงทุนตัดสินใจเลือกสิ่งหนึ่งเพิ่มขึ้น พวกเขาต้องแลกกับสิ่งอื่นๆ เสมอ
- เช่น เขาต้องแลกเสื้อผ้ากับอาหาร หรือ นักลงทุนเลือกผลตอบแทนที่มากขึ้นโดยแลกกับการเพิ่มความเสี่ยง

Preferences and Utility Function

- Preferences เป็นเครื่องมือที่ใช้อธิบาย ``ความพึงพอใจ'' หรือ ``ความชอบ'' ของนักลงทุน
  - ยกตัวอย่างเช่น $A \succsim B$ หมายความว่า นักลงทุนชอบทางเลือก A มากกว่าทางเลือก B
- โดยปกติ นักเศรษฐศาสตร์จะแทนความพึงพอใจด้วยฟังก์ชันอรรถประโยชน์ (utility function) ซึ่งทำให้สะดวกต่อการวิเคราะห์
  - ความพึงพอใจของนักลงทุน อาจจะขึ้นอยู่กับค่าลอการิธึมของความมั่งคั่ง (wealth) ที่ได้จากการลงทุน ซึ่งเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$U(w) = \ln w \tag{3}$$

  - หรืออาจจะรูปของการบริโภคในวันนี้ c_t และการบริโภคในวันพรุ่งนี้ c_{t+1} ซึ่งเขียนในรูปสมการได้เป็น

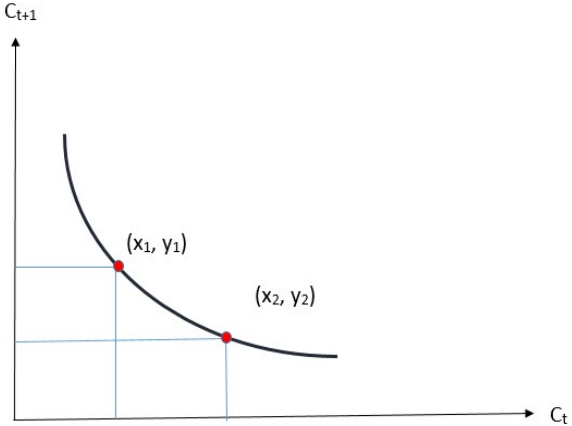
$$U(c_t, c_{t+1}) = \ln c_t + \beta \ln c_{t+1} \tag{4}$$

  โดยที่ β คือระดับการลดทอนค่าของอนาคต (discount factor)

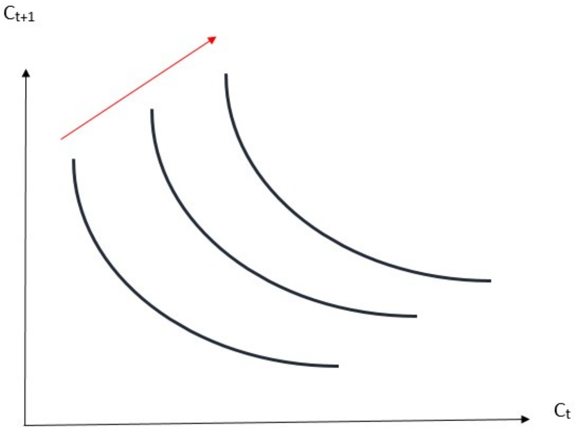
Utility Function and Indifference Curves

- เพื่อความสะดวก บางครั้งนักเศรษฐศาสตร์จะแทน utility function ด้วย Indifference Curves ซึ่งเป็นเส้นที่แสดงถึงทางเลือกต่างๆ ที่ให้ระดับความพึงพอใจที่เท่ากัน ยกตัวอย่างเช่น กรณีของ U (c_t, c_{t+1})

Basic Properties of Indifference Curves



Basic Properties of Indifference Curves



Utility Maximization and Opportunity Set as A Constraint

- นักเศรษฐศาสตร์มักสมมุติว่า ตัวแทนทางเศรษฐกิจ (economic agent) หรือนักลงทุน จะเลือกทำกิจกรรมหรือลงทุนเพื่อให้ได้ค่าอรรถประโยชน์สูงสุด (utility maximization) ภายใต้ข้อจำกัด (constraint) ที่นักลงทุนเผชิญอยู่ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปของ opportunity set

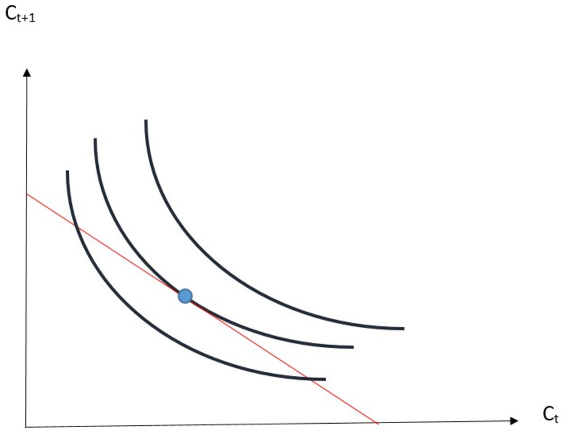
$$\max_{c_t, c_{t+1}} U\left(c_t, c_{t+1}\right)$$

subject to budget constraint

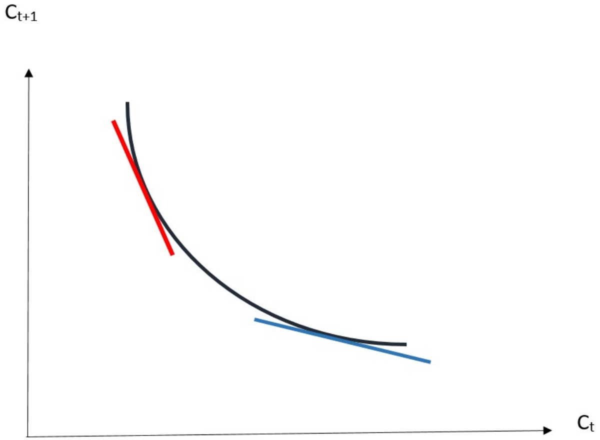
$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w$$

โดยที่ w คือสินทรัพย์ทั้งหมดที่มี (wealth) ในที่นี้ budget constraint เป็นตัวกำหนด opportunity set

Utility Maximization in Graph



Utility Maximization in Graph



Uncertainty and Expected Utility

- Let W be a random variable representing an investor's wealth with distribution function $F(w)$:

$$E(W) = \int w dF(w).$$

- The expected utility of this random variable is defined as follows:

$$EU(W) = \int U(w) dF(w).$$

Example of Expected Utility

Consider a utility function of the form: $U(w) = 4w - \frac{w^2}{10}$.

Investment A			Investment B		
outcome	utililty of outcome	Probalility	outcome	utililty of outcome	Probalility
20	40	3/15	19	39.9	1/5
18	39.6	5/15	10	30	2/5
14	36.4	4/15	5	17.5	2/5
10	30	2/15			
6	20.4	1/15			

EU(A) = 36.3 and EU(B) = 26.98 while E(A) =15.47 and E(B) = 9.8 .

Risk Aversion

Risk aversion is a property of the utility function:

Definition

A consumer exhibits risk aversion if, for any lottery F,

$$\int U(w)dF(w) \leq U\left(\int wdF(w)\right). \tag{5}$$

This consumer exhibits risk neutral if, for any lottery F,

$$\int U(w)dF(w) = U\left(\int wdF(w)\right). \tag{6}$$

This consumer exhibits risk loving if, for any lottery F,

$$\int U(w)dF(w) > U\left(\int wdF(w)\right). \tag{7}$$

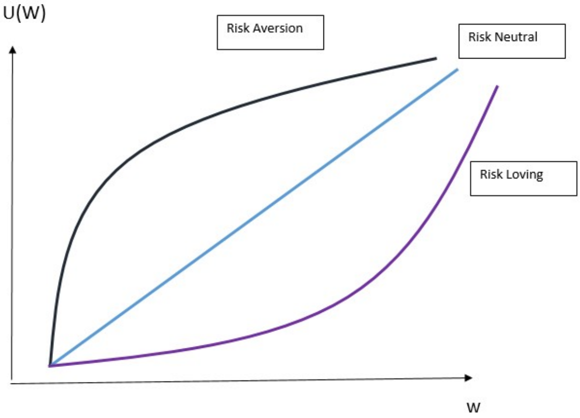
Risk Aversion and Concavity of Utility Function

Risk aversion measurement is closely related to the concavity of the Bernoulli utility function $U(\cdot)$. Mathematically, this is a result of the well known Jensen's inequality, which implies that, for any distribution function $F(w)$,

$$\int U(w)dF(w) \leq U\left(\int wdF(w)\right), \tag{8}$$

if and only if function $U(\cdot)$ is concave, and the relationship will hold with equality if and only if function $U(\cdot)$ is linear.

Risk Aversion and Concavity of Utility Function



Risk Aversion Coefficients

Definition (Coefficient of Absolute Risk Aversion)

Given a Bernoulli utility function $U(\cdot)$, the Arrow-Pratt coefficient of absolute risk aversion (ARA) at w is defined as

$$\mu^{A}(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)}. \tag{9}$$

Definition (Coefficient of Relative Risk Aversion)

Given a Bernoulli utility function $U(\cdot)$, the coefficient of relative risk aversion (RRA) at w is defined as

$$\mu^{R}(w) = -\frac{wU''(w)}{U'(w)}. \tag{10}$$

Concavity and Risk Aversion Coefficients

Table: Relationship between risk aversion, concavity of th Bernoulli utility function, coefficient of absolute risk aversion, and coefficient of relative risk aversion.

Risk aversion type	Bernoulli utility function	ARA	RRA
risk averse	strictly concave	+	+
risk neutral	linear	0	0
risk loving	strictly convex	-	-

Certainty Equivalence

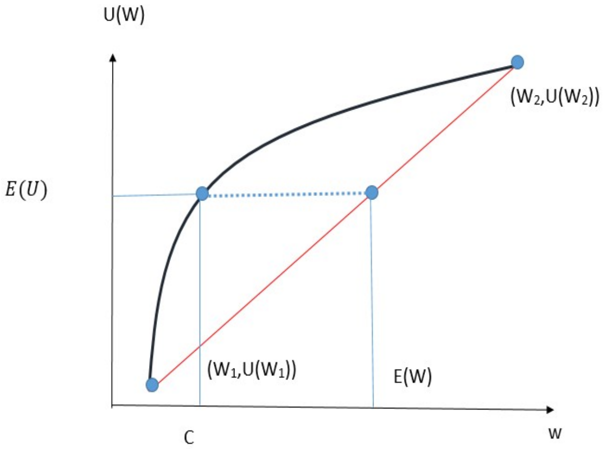
We now define the certainty equivalent of a lottery F, denoted $c(F, U)$, as the amount of wealth for which the consumer is indifferent between the lottery F and the certain amount $c(F, U)$.

Definition

Given a Bernoulli utility function $U(\cdot)$. The certainty equivalent of F, $c(F, U)$, is such that

$$U(c(F, U)) = \int U(w)\, dF(w)\,. \tag{11}$$

Certainty Equivalence



Risk Premium

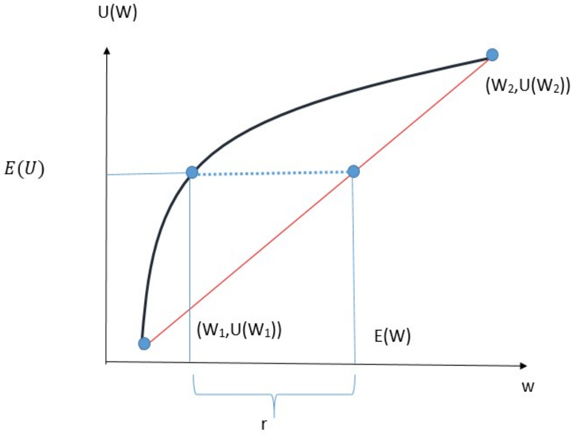
We also define the risk premium $r(F, U)$ for a lottery F as the maximum amount of wealth that the consumer is willing to pay to get rid of risk or to get the mean outcome of the lottery (to avoid risk of the lottery).

Definition

Given a Bernoulli utility function $U(\cdot)$. The risk premium of F, $r(F, U)$, satisfies the following equation:

$$U\left(\int w dF(w) - r(F, U)\right) = \int U(w)\, dF(w)\,. \tag{12}$$

Risk Premium



Stochastic Dominance as Lottery Comparison Concept

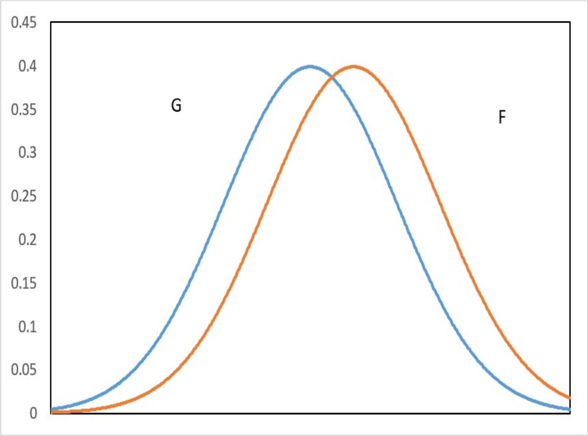
The first concept, first-order stochastically dominance, is to measure the worthiness of each alternative or action. For example, we may want to compare an investment plan A and an investment plan B. If A first-order stochastically dominates B, then you should follow A.

Definition

The lottery $F(\cdot)$ first-order stochastically dominates a lottery $G(\cdot)$ if, for every nondecreasing (Bernoulli utility) function $U : W \to \mathbb{R}$, we have

$$\int_W U(w)dF(w) \geq \int_W U(w)dG(w). \tag{13}$$

First-Order Stochastic Dominance



Stochastic Dominance as Lottery Comparison Concept

The second concept, second-order stochastically dominance, is to measure the riskiness of each alternative or action. For example, we may want to compare an investment plan A and an investment plan B. If A second-order stochastically dominates B, then B is riskier than A.

Definition

For any two lotteries $F(\cdot)$ and $G(\cdot)$ with the same mean, $F(\cdot)$ second-order stochastically dominates $G(\cdot)$ if, for every nondecreasing and concave (Bernoulli utility) function $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, we have

$$\int U(w)dF(w) \geq \int U(w)dG(w). \tag{14}$$

Mean-Preserving Spread

- One example of the second-order stochastic dominance is a mean-preserving spread process.
- Let F be the distribution function for a random variable x, and G is the distribution function for a random variable $x + \varepsilon$ such that ε is independent of x (i.e., $E(\varepsilon|x) = 0$), its mean $E(\varepsilon) = 0$, and its variance $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \neq 0$. That is, we add some uncertainty to x. This process makes G riskier than F.
- If $G(\cdot)$ is a mean-preserving spread $F(\cdot)$, then $F(\cdot)$ second-order stochastically dominates $G(\cdot)$.

Mean-Preserving Spread