Portfolio Choices under Different Preferences

ผศ.ดร. วีระชาติ กิเลนทอง
มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

Mean-Variance Portfolio Theory and Quadratic Utility Function

- Mean-Variance Portfolio Theory กำหนดให้นักลงทุนสนใจเพียงแค่ expected return และ standard deviation.
- คำถามก็คือ นักลงทุนต้องมี utility function $U(\cdot)$ แบบใดจึงจะมีคุณสมบัติตามที่ Mean-Variance Portfolio Theory กำหนด?
- คำตอบก็คือ utility function จะต้องอยู่ในรูปกำลังสอง (quadratic utility function)

$$U(w) = a + bw - cw^2$$

โดยที่ $b > 0$ และ $c > 0$

Mean-Variance Portfolio Theory and Quadratic Utility Function

- สมมุติว่านักลงทุนนำสินทรัพย์เริ่มต้น w_0 มาลงทุนในหลักทรัพย์ที่มีอัตราผลตอบแทน R (ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม) สินทรัพย์หลังจากการลงทุน (final wealth) ของนักลงทุนจะเท่ากับ

$$w = w_0 R$$

ดังนั้น utility function ของนักลงทุนสามารถเขียนได้เป็น

$$U(w) = a + bw_0 R - cw_0^2 R^2 = \alpha + \beta R - \kappa R^2$$

กล่าวคือ ระดับสินทรัพย์เริ่มต้น w_0 ไม่มีผลต่อการตัดสินใจลงทุนในแบบจำลองนี้

Mean-Variance Portfolio Theory and Quadratic Utility Function

- Expected utility ของ quadratic utility function สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ expected return และ standard deviation ได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EU} &= \int \left(\alpha + \beta \mathrm{R} - \kappa \mathrm{R}^2\right) \mathrm{dF}\left(\mathrm{R}\right) = \alpha + \beta \mathrm{E}\left(\mathrm{R}\right) - \kappa \mathrm{E}\left(\mathrm{R}^2\right) \\
&= \alpha + \beta \mu_{\mathrm{R}} - \kappa \mu_{\mathrm{R}}^2 - \kappa \sigma_{\mathrm{R}}^2
\end{aligned}
$$

  โดยที่ ขั้นตอนสุดท้ายอาศัยผลลัพธ์ที่ว่า $\mathrm{E}\left(\mathrm{R}^2\right) = \mu_{\mathrm{R}}^2 + \sigma_{\mathrm{R}}^2$ และ $\beta > 0$ และ $\kappa > 0$
- ผลลัพธ์ที่ได้หมายความว่า นักลงทุนให้ความสนใจค่าสถิติของอัตราผลตอบแทนเพียง 2 ค่าคือ expected return μ_{R} และ standard deviation σ_{R} ซึ่งสอดคล้องกับหลักการของ Mean-Variance Portfolio Theory (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก Portfolio theory and capital markets (1970) โดย William Sharpe)

Mean-Variance Portfolio Theory and Quadratic Utility Function

- Expected utility ของ quadratic utility function สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\text{EU} = \alpha + \beta\mu_{\text{R}} - \kappa\mu_{\text{R}}^2 - \kappa\sigma_{\text{R}}^2$$

- เราจะเห็นได้ว่า ความพึงพอใจของนักลงทุนจะลดลงหาก σ_{R} เพิ่มขึ้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ นักลงทุนไม่ชอบ σ_{R}
- ในขณะเดียวกัน ความพึงพอใจของนักลงทุนจะเพิ่มขึ้นหาก μ_{R} เพิ่มขึ้น ตราบเท่าที่ $\mu_{\text{R}} < \frac{\beta}{2\kappa}$ กล่าวคือ นักลงทุนชอบ μ_{R}
  - ประเด็นนี้เป็นข้อจำกัดที่สำคัญของ quadratic utility function ซึ่งให้คุณสมบัติที่เหมาะสมหากค่า expected return ไม่สูงเกินไปเท่านั้น
- โดยสรุป นักลงทุนที่มี quadratic utility function จะเลือกกลุ่มหลักทรัพย์โดยคำนึงถึงเพียง expected return μ_{R} และ standard deviation σ_{R} และมีคุณสมบัติเหมือนกับ Mean-Variance Portfolio Theory (ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า $\mu_{\text{R}} < \frac{\beta}{2\kappa}$)

Mean-Variance Portfolio Theory and Normal Distribution

- หากอัตราผลตอบแทนกระจายตัวแบบปกติ (normally distributed) นักลงทุนก็จะคำนึงถึงเพียง expected return μ_R และ standard deviation σ_R โดยอัตโนมัติ
  - คำตอบที่ได้จาก utility maximization จะสอดคล้องกับ Mean-Variance Portfolio Theory
- ยิ่งไปกว่านั้น หากอัตราผลตอบแทนกระจายตัวแบบล็อกปกติ (log-normally distributed) นักลงทุนก็จะคำนึงถึงเพียง expected return μ_R และ standard deviation σ_R ดังนั้น คำตอบที่ได้จาก utility maximization จะสอดคล้องกับ Mean-Variance Portfolio Theory เช่นเดียวกัน

Safety First Criteria

- นักลงทุนอาจจะใช้เงื่อนไขที่ช่วยให้เกิดความมั่นใจว่า โอกาสที่จะมีผลตอบแทนที่ต่ำมากๆ มีค่าน้อยๆ ซึ่งอาจจะเรียกได้ว่าเป็นนโยบายแบบ ``ปลอดภัยไว้ก่อน (safety first)''
- นโยบายการลงทุนแบบนี้ใช้ความเสี่ยงทางด้านลบ (downside risks) เป็นตัวตั้ง ซึ่งแตกต่างจาก mean-variance portfolio theory ซึ่งใช้ค่าคาดหวัง และค่าความเบี่ยงเบนเป็นสำคัญ แต่อย่างไรก็ตาม นโยบายแบบปลอดภัยไว้ก่อนนี้จะให้ผลลัพธ์แบบเดียวกับ mean-variance portfolio theory ภายใต้ข้อสมมุติที่สมเหตุสมผล
- นโยบายแบบปลอดภัยไว้ก่อน แบ่งได้เป็น 3 กลุ่ม
  1. เงื่อนไขของ Roy
  2. เงื่อนไขของ Kataoka
  3. เงื่อนไขของ Telser

Roy's Criterion

- Roy (1952) เสนอเงื่อนไขเพื่อใช้ในเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ โดยมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (objective function) ดังต่อไปนี้

  $$\min \text{Prob}\left(R_p < R_L\right)$$

  โดยที่ R_p คืออัตราผลตอบแทนจากการลงทุน และ R_L คืออัตราผลตอบแทนที่นักลงทุนใช้เป็นเกณฑ์ที่กำหนดระดับความปลอดภัยของการลงทุน ซึ่งหมายความว่านักลงทุนไม่ต้องการให้อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนต่ำกว่า R_L
- เงื่อนไขในรูปแบบนี้ต้องการเลือกการลงทุนที่ทำให้โอกาสหรือความน่าจะเป็นที่อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนจะต่ำกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้มีค่าต่ำที่สุด

Roy's Criterion and Normal Distribution

หากอัตราผลตอบแทนมีการกระจายตัวแบบปกติ (normally distributed) เราสามารถเปลี่ยนรูปแบบของ Roy's Criterion ให้อยู่ในรูปของเบี่ยงเบนมาตรฐานจากค่าคาดหวัง (standard deviation from mean) ดังนั้น นักลงทุนควรจะเลือกการลงทุนแบบ B

	Portfolio		
	A	B	C
Mean return	10	14	17
Standard deviation(s)	5	4	8
Difference from 5 %	-1σ	-2.25σ	-1.5σ

Roy's Criterion and Normal Distribution

- หากอัตราผลตอบแทนมีการกระจายตัวแบบปกติ (normally distributed) เราสามารถเปลี่ยนรูปแบบของ Roy's Criterion ให้อยู่ในรูป

$$\min \frac{R_L - \bar{R}_p}{\sigma_p} \Rightarrow \max \frac{\bar{R}_p - R_L}{\sigma_p}$$

- ยิ่งไปกว่านั้น หากนักลงทุนสามารถกู้ยืมหรือให้กู้แบบไม่มีความเสี่ยงด้วยอัตราดอกเบี้ย R_L แล้ว Roy's Criterion จะเหมือนกับเงื่อนไขของ mean-variance portfolio theory
- โดยสรุป หากอัตราผลตอบแทนมีการกระจายตัวแบบปกติ (normally distributed) Roy's Criterion จะให้คำตอบเช่นเดียวกับ mean-variance portfolio theory

Roy's Criterion and Non-Normal Distribution

- ยิ่งไปกว่านั้น Roy's Criterion จะให้คำตอบเช่นเดียวกับ mean-variance portfolio theory ตราบเท่าที่การกระจายตัวของอัตราผลตอบแทนมี first and second moments
- วิธีการพิสูจน์อาศัย Tchebyshev's inequality

$$\mathrm{Prob}\left(\left|\frac{R_p - \bar{R}_p}{\sigma_p}\right| > K\right) \leq \frac{1}{K^2}$$

เนื่องจากเราสนใจ downside risks เท่านั้น ดังนั้น $\left|\frac{R_p - \bar{R}_p}{\sigma_p}\right| = -\left(\frac{R_p - \bar{R}_p}{\sigma_p}\right)$ ซึ่งช่วยให้เราเขียนอสมการข้างบนได้เป็น

$$\mathrm{Prob}\left(\frac{R_p - \bar{R}_p}{\sigma_p} < -K\right) \leq \frac{1}{K^2}$$

Roy's Criterion and Non-Normal Distribution

- ถ้าเราเลือกค่า

$$K = \frac{\bar{R}_p - R_L}{\sigma_p}$$

เราจะสามารถเขียนอสมการข้างบนได้เป็น

$$\text{Prob}\left(R_p < R_L\right) \leq \frac{1}{K^2}$$

- ดังนั้น Roy's criterion ในรูปแบบนี้ก็คือ การเลือกค่า K ที่สูงที่สุดที่เป็นไปได้ นั่นคือ

$$\max \frac{\bar{R}_p - R_L}{\sigma_p}$$

ซึ่งตรงกับเงื่อนไขในกรณีที่อัตราผลตอบแทนมีการกระจายตัวแบบปกติ

Kataoka's Criterion

- Kataoka's Criterion หาค่า R_L สูงที่สุดที่ทำให้ความน่าจะเป็นที่อัตราผลตอบแทนจะน้อยกว่า R_L ไม่มากไปกว่าระดับที่กำหนด α

$$\max R_L$$

subject to

$$\text{Prob}\left(R_p \leq R_L\right) \leq \alpha$$

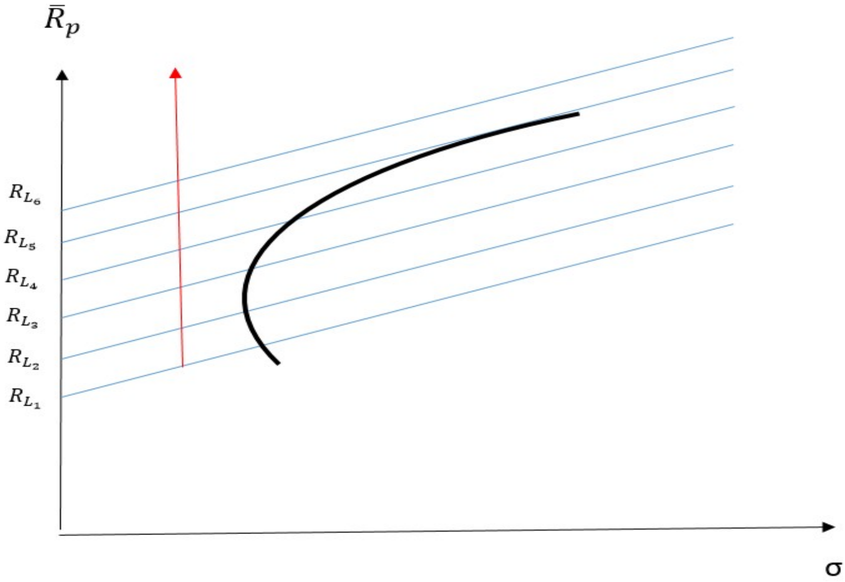
Kataoka's Criterion and Normal Distribution

- หากอัตราผลตอบแทนมีการกระจายตัวแบบปกติ (normally distributed) เราสามารถเปลี่ยนข้อจำกัด (constraint) ของ Kataoka ให้อยู่ในรูปของ $K = \frac{R_L - \bar{R}_p}{\sigma_p}$ ได้ดังต่อไปนี้
- กำหนดให้ K_α คือ K ที่ทำให้ $\text{Prob}\left(\frac{R_L - \bar{R}_p}{\sigma_p} \leq K_\alpha\right) = \alpha$ ดังนั้น เราสามารถเขียนข้อจำกัดของ Kataoka ได้เป็น

$$\frac{R_L - \bar{R}_p}{\sigma_p} \leq K_\alpha \Rightarrow R_L \leq \bar{R}_p + K_\alpha \sigma_p$$

- ดังนั้น สำหรับระดับ α ที่กำหนดให้ Kataoka's Criterion จะเลือก R_L ที่มีค่าสูงที่สุดตราบเท่าที่ $\bar{R}_p = R_L + K_\alpha \sigma_p$ ซึ่งก็จะให้คำตอบที่เป็น efficient portfolio ตาม mean-variance portfolio theory
- ข้อสรุปนี้เป็นจริงในกรณีที่ อัตราผลตอบแทนไม่ได้มีการกระจายตัวแบบปกติ โดยอาศัย Tchebyshev's inequality

Kataoka's Criterion in Graph



Telser's Criterion

- Telser's Criterion หาค่า $\bar{R}_p$ สูงที่สุดที่ทำให้ความน่าจะเป็นที่อัตราผลตอบแทนจะน้อยกว่า R_L ไม่มากไปกว่าระดับที่กำหนด α

$$\max \bar{R}_p$$

subject to

$$\text{Prob}\left(R_p \leq R_L\right) \leq \alpha$$

- เช่นเดียวกับ Roy's และ Kataoka's criteria คำตอบที่ได้จะเป็น efficient portfolio ตาม mean-variance portfolio theory ภายใต้ข้อสมมุติที่ว่า การกระจายตัวของอัตราผลตอบแทนมี first and second moments

Maximizing the Geometric Mean Return

- เป้าหมายในการเลือกกลุ่มหลักทรัพย์อีกแบบหนึ่งคือ การเลือกกลุ่มหลักทรัพย์เพื่อให้ได้อัตราผลตอบแทนแบบเรขาคณิตสูงสุด (maximizing the geometric mean return)
- Latane (1959) พิสูจน์ว่า กลุ่มหลักทรัพย์ที่ให้ค่า expected value of terminal wealth สูงสุด คือ กลุ่มหลักทรัพย์ที่มีค่าอัตราผลตอบแทนแบบเรขาคณิตสูงสุด
  - สมมุติว่า อัตราผลตอบแทน R เป็นไปได้ทั้งหมด N ค่า คือ $R_1, \ldots, R_N$ ด้วยความน่าจะเป็น (ความถี่ของการเกิด) $p_1, \ldots, p_N$
  - สมมุติว่า นักลงทุนมีสินทรัพย์เริ่มต้น w_0 บาท สินทรัพย์ท้ายสุด (terminal wealth) มีค่าเท่ากับ (อาศัย law of large number ซึ่งกำหนดให้ ความน่าจะเป็นมีค่าเท่ากับความถี่ที่เกิดขึ้นจริง)

$$w = w_0 \left(1 + R_1\right)^{p_1 * T} \left(1 + R_2\right)^{p_2 * T} \ldots \left(1 + R_N\right)^{p_N * T} = w_0 \Pi_{i=1}^{N} \left(1 + R_i\right)^{p_i * T}$$

โดยที่ T คือจำนวนครั้งหรือเวลาทั้งหมดที่ได้รับผลตอบแทน ดังนั้น w จะมีค่าสูงสุดก็ต่อเมื่อ $\Pi_{i=1}^{N} \left(1 + R_i\right)^{p_i}$ มีค่าสูงสุด ซึ่งหมายความว่า อัตราผลตอบแทนแบบเรขาคณิต $\mu_R^G \equiv \Pi_{i=1}^{N} \left(1 + R_i\right)^{p_i} - 1$ มีค่าสูงสุด

Maximizing the Geometric Mean Return and Expected Utility Maximization

- คำถามที่สำคัญอันหนึ่งก็คือ เราสามารถหา utility function มาสนับสนุนการใช้อัตราผลตอบแทนแบบเรขาคณิตเป็นเป้าหมายในการจัดกลุ่มหลักทรัพย์ ได้หรือไม่?
- คำตอบก็คือ หากนักลงทุนมี utility function ในรูปของล็อกกาลิธึม (logarithm) แล้ว การใช้อัตราผลตอบแทนแบบเรขาคณิตเป็นเป้าหมายในการจัดกลุ่มหลักทรัพย์ ก็จะสอดคล้องกับการใช้ expected utility of terminal wealth เป็นเกณฑ์
  - พิจารณา utility maximization ต่อไปนี้

    $$\max \mathrm{EU}(w) = \mathrm{E} \ln w$$

    โดยที่ w เป็นตัวแปรสุ่มของ terminal wealth

    $$\begin{aligned} \mathrm{E} \ln w &= \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \left[w_0 \left(1 + R_i\right)\right] = \ln w_0 + \ln \left[\Pi_{i=1}^{N} \left(1 + R_i\right)^{p_i}\right] \\ &= \ln w_0 + \ln \left(\mu_R^G + 1\right) \end{aligned}$$

  - $\max \mathrm{E} \ln w$ ให้คำตอบเช่นเดียวกับ $\max \mu_R^G$

Maximizing the Geometric Mean Return and Mean-Variance Frontier

- ถึงแม้ว่าเราจะสามารถบอกได้ว่า การใช้อัตราผลตอบแทนแบบเรขาคณิตเป็นเป้าหมายในการจัดกลุ่มหลักทรัพย์ สอดคล้องกับการใช้ expected utility of terminal wealth เป็นเกณฑ์ หาก utility function ในรูปของล็อกกาลิธึม (logarithm) แต่ log utility มีปัญหาเรื่อง
  - การไม่มองการไกลของนักลงทุน (myopic behaviour) ซึ่งหมายความว่า หากนักลงทุนใช้ log utility ในการตัดสินใจแล้ว เขาจะสนใจอนาคตในวันพรุ่งนี้ (ช่วงเวลาถัดไป) เท่านั้น โดยไม่สนใจว่าอะจะเกิดขึ้นหลังจากนั้นหรือไม่ ซึ่งไม่ค่อยจะเหมาะสมกับความเป็นจริงเท่าใดนัก
- อีกคำถามหนึ่งที่สำคัญคือ ภายใต้เงื่อนไขแบบใดที่ คำตอบจากการใช้อัตราผลตอบแทนแบบเรขาคณิตเป็นเป้าหมาย จึงจะเป็น mean-variance efficient?
  - คำตอบก็คือ เมื่ออัตราผลตอบแทนมีการกระจายตัวแบบปกติ (normal distribution) หรือแบบล็อกปกติ (log-normal distribution)

Value at Risk (VaR)

- Value at Risk (VaR) วัดขนาดของการสูญเสีย (loss) ที่ต่ำที่สุดที่จะเกิดขึ้นได้ที่ระดับความน่าจะเป็นอันใดอันหนึ่ง
- VaR ที่ระดับความน่าจะเป็น $\alpha\%$ มีค่าเท่ากับ VaR ที่ทำให้

$$\mathsf{F}\left(\mathsf{VaR}\right) = \mathsf{Prob}\left(\mathsf{R} \leq \mathsf{VaR}\right) = \alpha$$

โดยที่ $\mathsf{F}(\cdot)$ คือฟังก์ชันการกระจาย (distribution function) ของผลตอบแทนของการลงทุน

Value at Risk (VaR)