Return Calculation and Mean Variance Portfolios

ผศ.ดร. วีระชาติ กิเลนทอง
มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

Main Issues

- ข้อมูลที่ใช้ในการลงทุน
  - การใช้ข้อมูลเป็นหัวใจของการเรียน Quantitative Finance
  - ข้อมูลตราสารทุนจากตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยสามารถสืบค้นได้จาก SET SMART ซึ่งนักศึกษาสามารถเข้าถึงได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายเมื่ออยู่ในมหาวิทยาลัย ผ่าน `http://10.21.7.31:8080/homepage.html`
- การคำนวณพื้นฐาน
  - อัตราผลตอบแทนรวม (Total return)
  - สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์
    - mean
    - variance-covariance

ข้อมูลตราสารทุน

- SET SMART มีข้อมูลจำนวนมาก ทั้งด้านราคาหุ้น ปริมาณหุ้น รวมไปถึง คณะกรรมการบริษัท
- อย่างไรก็ตาม ในวิชานี้ เราจะให้ความสำคัญกับข้อมูลต่อไปนี้เป็นสำคัญ
    1. ราคาปิดรายวัน (close price) P_t
    2. เงินปันผลที่เป็นตัวเงิน (cash dividend) เช่น หุ้นจ่ายปันผลจำนวน $D_{c,t}$ บาท
    3. เงินปันผลที่เป็นหุ้น (stock dividend) เช่น หุ้นจ่ายปันผลจำนวน $D_{s,t}$ หุ้น
    4. สิทธิ์ในการซื้อหุ้นเพิ่มทุน (option rights) ซึ่งจะระบุสัดส่วนของจำนวนที่มีสิทธิ์ในการซื้อต่อจำนวนหุ้นที่ถือ q_t และราคาของสิทธิ์ K_t ยกตัวอย่างเช่น $q_t = 1 : 10$ และ $K_t = 10$
- ตัวแปรที่สำคัญที่เราต้องการคือ **อัตราผลตอบแทน (return)**

อัตราผลตอบแทน

- อัตราผลตอบแทนรวม (gross return) ในช่วงเวลา t (ซึ่งอาจจะเป็นรายวัน รายปี เป็นต้น) สามารถหาได้จาก

$$R_t = \frac{P_t + B_t}{P_{t-1}} \tag{1}$$

  โดยที่ B_t ผลประโยชน์รวมทั้งหมด (ซึ่งแปลงเป็นหน่วยเดียวกับราคา) ที่ได้รับในช่วงเวลา t ซึ่งประกอบไปด้วย
  - ผลประโยชน์จากปันผลที่เป็นตัวเงิน (cash dividend) คือ $D_{c,t}$
  - ผลประโยชน์จากปันผลที่เป็นหุ้น (stock dividend) คือ $P_t D_{s,t}$
  - สิทธิ์ในการซื้อหุ้นเพิ่มทุน (option rights) คือ $q_t \max\{P_t - K_t, 0\}$ เมื่อ K_t คือราคาของหุ้นที่มีสิทธิ์ในการซื้อ

อัตราผลตอบแทน

- อัตราผลตอบแทนรวม (gross return) ในช่วงเวลา t สามารถหาได้จาก

$$R_t = \frac{P_t + D_{c,t} + P_t D_{s,t} + q_t \max\{P_t - K_t, 0\}}{P_{t-1}} \tag{2}$$

  "อัตราผลตอบแทนรวม" บอกว่า เราจะมีเงินทั้งหมด $100 \times R_t$ บาท หากเราลงทุน 100 บาท ณ จุดสิ้นสุดของช่วงเวลา $t-1$

- อัตราผลตอบแทนสุทธิ (net return) ในช่วงเวลา t สามารถหาได้จาก

$$r_t = \frac{P_t + D_{c,t} + P_t D_{s,t} + q_t \max\{P_t - K_t, 0\} - P_{t-1}}{P_{t-1}} = R_t - 1 \tag{3}$$

  อัตราผลตอบแทนสุทธิ บอกว่า เราได้กำไรทั้งหมด $100 \times r_t$ บาท หากเราลงทุน 100 บาท ณ จุดสิ้นสุดของช่วงเวลา $t-1$

SET Index

- อะไรคือผลตอบแทนของตลาด?
- ผลตอบแทนของตลาดทุน
  - SET Index คิดจากการเปลี่ยนแปลงของมูลค่าทั้งหมดที่เกิดขึ้นทั้งหมด (market capital) ในตลาดหลักทรัพย์ หรือ เรียกว่ามูลค่าตลาด
  - SET Total Return Index คิดจากการเปลี่ยนแปลงของมูลค่ามูลค่าตลาดกับผลประโยชน์จากการปันผลในรูปตัวเงิน (cash dividend)

SET Index

- การคำนวนดัชนีผลตอบแทน ของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET Index) เป็นเครื่องมือที่ใช้วัดผลตอบแทนของการลงทุนในหลักทรัพย์ ได้แก่
    - ผลตอบแทนที่ได้จากการเปลี่ยนแปลงมูลค่าของหลักทรัพย์ที่ลงทุน (Capital Gain/Loss)
    - ผลตอบแทนที่ได้จากสิทธิในการจองซื้อหุ้น (Right)
- การปรับฐานการคำนวนดัชนีราคาหุ้นของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย จึงมีความสำคัญในการคิด SET index
- การปรับฐานการคำนวนดัชนีราคาหุ้น ของตลาดเมื่อ
    - เมื่อมีหลักทรัพย์จดทะเบียนเข้าตลาดหลักทรัพย์ใหม่
    - เมื่อมีหลักทรัพย์เพิกถอนออกจากตลาดหลักทรัพย์
    - เมื่อมีหลักทรัพย์เพิ่มทุนจดทะเบียน
    - เมื่อมีหลักทรัพย์ลดทุนจดทะเบียน
    - เมื่อมีหลักทรัพย์ย้ายตลาดเข้าและออกจากตลาด
- การแตกหุ้น (split par) จะไม่มีการปรับฐานแต่อย่างใด เนื่องจากการแตกหุ้นจำทำให้จำนวนหุ้นจดทะเบียนเพิ่มขึ้นและราคาหุ้นจะลดลงในสัดส่วนที่เท่ากัน ดังนั้นมูลค่าตลาดจะไม่เปลี่ยนแปลง

SET Total Return Index (SET TRI)

- การคำนวนดัชนีผลตอบแทนรวม ของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET Total Return Index : SET TRI) เป็นเครื่องมือที่ใช้วัดผลตอบแทนทุกประเภทของการลงทุนในหลักทรัพย์ ได้แก่
  - ผลตอบแทนที่ได้จากการเปลี่ยนแปลงมูลค่าของหลักทรัพย์ที่ลงทุน (Capital Gain/Loss)
  - ผลตอบแทนที่ได้จากสิทธิในการจองซื้อหุ้น (Right)
  - ผลตอบแทนที่ได้จากเงินปันผล (Dividend)
- การคำนวณคล้ายกับ SET Index แต่มีการเพิ่มในส่วนของ ผลตอบแทนจากเงินปันผล (dividend yield)

การคำนวนดัชนีผลตอบแทนรวมโดยใช้อัตราผลตอบแทนรวม (FEDR TRI)

- ดัชนีผลตอบแทนรวม ซึ่งจัดทำขึ้นโดย RIPED (Financial and Economic Data for Research Total Return Index; FEDR TRI) เป็นเครื่องมือที่ใช้วัดผลตอบแทนที่ได้รับเป็นตัวเงิน
- หากลงทุนในตลาดโดยจัดกลุ่มหลักทรัพย์โดยหาน้ำหนักจากมูลค่าตลาด (value-weighted) จำนวน 100 บาท หรือ 1,000 บาท แล้วจะมีทรัพย์สินมูลค่าเท่าใดในแต่ละช่วงเวลา t
- การคำนวณ

$$\text{FEDR TRI}_t = \text{FEDR TRI}_{t-1} \times \text{FEDR total return}_t$$

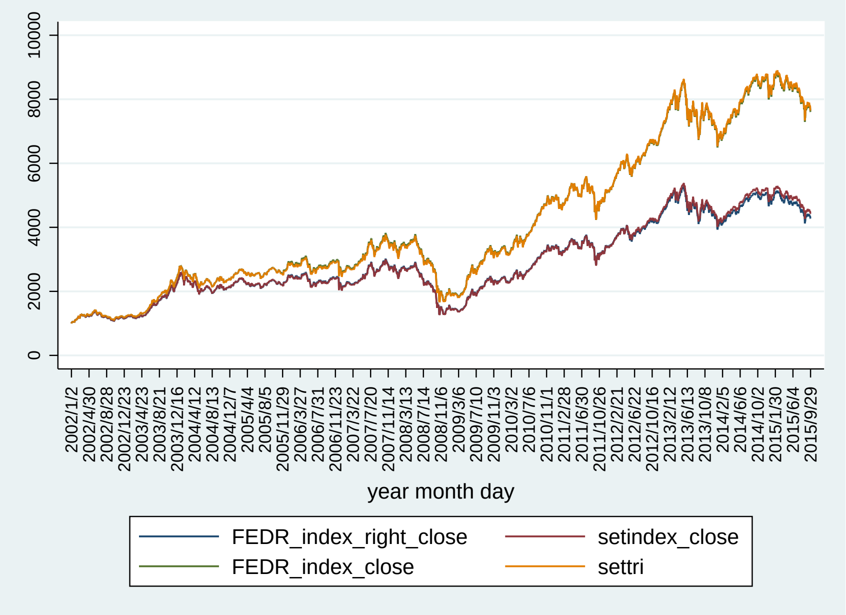
เมื่อ

$$\text{FEDR total return}_t = \sum_{i=1}^{n} \left(\text{Return}_{i,t} \times \text{Market Ratio}_{i,t-1}\right)$$

และ

$$\begin{aligned} \text{Market Ratio}_{i,t} &= \frac{\text{Market Capital}_{i,t}}{\text{Total Market Capital}_t} \\ \text{Return}_{i,t} &= \text{Capital Gain}_{i,t} + \text{Right Benefit}_{i,t} + \text{Dividend}_{i,t} \end{aligned}$$

SET Index


0
2000
4000
6000
8000
10000
2002/1/2
2002/4/30
2002/8/28
2002/12/23
2003/4/23
2003/8/21
2003/12/16
2004/4/12
2004/8/13
2004/12/7
2005/4/4
2005/8/5
2005/11/29
2006/3/27
2006/7/31
2006/11/23
2007/3/22
2007/7/20
2007/11/14
2008/3/13
2008/7/14
2008/11/6
2009/3/6
2009/7/10
2009/11/3
2010/3/2
2010/7/6
2010/11/1
2011/2/28
2011/6/30
2011/10/26
2012/2/21
2012/6/22
2012/10/16
2013/2/12
2013/6/13
2013/10/8
2014/2/5
2014/6/6
2014/10/2
2015/1/30
2015/6/4
2015/9/29
year month day
FEDR_index_right_close
setindex_close
FEDR_index_close
settri

การคำนวณอัตราผลตอบแทนเฉลี่ย

- เราสามารถคำนวณ อัตราผลตอบแทนเฉลี่ย ได้หลายวิธี (เช่นเดียวกับที่นักฟิสิกส์มีหลายวิธีในการคำนวณความเร็วเฉลี่ย) แต่มีอยู่ 2 วิธีที่ได้รับความนิยมสูงสุด
  1. อัตราผลตอบแทนเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean return) ระหว่างช่วงเวลาที่ 1 ถึง T สามารถหาได้จาก

$$\bar{R} = \frac{\sum_{t=0}^{T} R_t}{T} \tag{4}$$

  2. อัตราผลตอบแทนเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean return) ระหว่างช่วงเวลาที่ 1 ถึง T สามารถหาได้จาก

$$\bar{R} = \left[\prod_{t=0}^{T} R_t\right]^{\frac{1}{T}} = \sqrt[T]{\prod_{t=0}^{T} R_t} \tag{5}$$

- ความแตกต่างที่สำคัญคือ อัตราผลตอบแทนเฉลี่ยเรขาคณิตจะสะท้อนถึงจำนวนเงินที่มีอยู่ ณ ช่วงเวลาสุดท้ายเป็นสำคัญ ในขณะที่ อัตราผลตอบแทนเฉลี่ยเลขคณิต จะมองว่า อัตราผลตอบแทนในแต่ละช่วงเวลาเป็นเหมือนผลการโดยเหรียญ ซึ่งมีความถูกต้องทางสถิติมากกว่า

Basic Probability Theory

- กำหนดให้ $s \in \mathcal{S}$ คือ เหตุการณ์ (event or state of nature) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดภายใต้สถานการณ์ที่ต้องการศึกษา
- ตัวแปรสุ่มคือ $X : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$
  1. Realization in state $X(s) = x$. ฟังก์ชันการกระจาย (Distribution function): CDF $F(x)$, pdf $f(x)$.
  2. ค่าความคาดหวัง (expectation) หรือ ค่าเฉลี่ย (Mean) คือ (population statistics):
$$E(X) = \int_X x dF(x) = \int_S x f(x) dx \tag{6}$$
  3. ความแปรปรวน (variance):
$$Var(X) = \int_X (x - E(X))^2 dF(x) = \int_S (x - E(X))^2 f(x) dx \tag{7}$$
  4. ความแปรปรวนร่วม (covariance):
$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= \int_{X_1 \times X_2} (x_1 - E(X_1))(x_2 - E(X_2)) dF(x, x_2) \\ &= \int (x_1 - E(X_1))(x_2 - E(X_2)) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Basic Properties

- Mean:

$$\begin{aligned}
E(\alpha X_1 + \beta X_2) &= \int (\alpha x_1 + \beta x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int \alpha x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int \beta x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \alpha \int x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \beta \int x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \alpha E(X_1) + \beta E(X_2) \\
E(X_1 X_2) &\neq E(X_1) E(X_2)
\end{aligned}$$

Basic Properties

- Covariance:

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= \int (x_1 - E(X_1))(x_2 - E(X_2))f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int x_1x_2f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&+ \int E(X_1)E(X_2)f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&- \int x_1E(X_2)f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&- \int E(X_1)x_2f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) \\
E(X_1X_2) &= Cov(X_1, X_2) + E(X_1)E(X_2)
\end{aligned}
$$

Basic Properties

- Variance:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int (x - E(X))^2 f(x)dx \\
&= \int (x^2 - 2xE(X) - E(X)^2) f(x)dx \\
&= \int x^2 f(x)dx - 2\int xE(X)f(x)dx + \int E(X)^2 f(x)dx \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Basic Properties

- Variance:

$$
\begin{aligned}
Var(X_1 + X_2) &= E\left((X_1 + X_2)^2\right) - E\left(X_1 + X_2\right)^2 \\
&= E\left(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2\right) - [E(X_1) + E(X_2)]^2 \\
&= E\left(X_1^2\right) + 2E\left(X_1X_2\right) + E\left(X_2^2\right) \\
&- \left[E(X_1)^2 + 2E(X_1)E(X_2) + E(X_2)^2\right] \\
&= \left[E\left(X_1^2\right) - E(X_1)^2\right] + 2\left[E\left(X_1X_2\right) - E(X_1)E(X_2)\right] \\
&+ \left[E\left(X_2^2\right) - E(X_2)^2\right] \\
Var(X_1 + X_2) &= Var(X_1) + 2Cov(X_1, X_2) + Var(X_2) \\
Var(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i) &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j Cov(X_i, X_j)
\end{aligned}
$$

Estimation

- เราสามารถประมาณ mean และ variance ได้อย่างไร
  - mean $E(X)$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \tag{8}$$

  - variance

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2}{N} \tag{9}$$

- ทั้ง 2 ค่านี้ เป็น **ค่าประมาณ** จาก**ข้อมูลตัวอย่าง**

Estimation of Mean and Variance of Returns

- กำหนดให้ R_{ij} คือ ผลตอบแทนแบบ j ของหลักทรัพย์ i
  (the j^{th} possible outcome for the return of asset i.)
- กำหนดให้ P_{ij} เป็นความน่าจะเป็นที่ จะเกิดผลผลตอบแทนแบบ j ของหลักทรัพย์ i
  (probability of the j^{th} return on asset i.)
- Mean return

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{J} P_{ij} R_{ij} \tag{10}$$

- ในทางปฏิบัติ P_{ij} คือ ความน่าจะเป็นที่หาได้จากข้อมูลตัวอย่าง (sampling probability)
- โดยปกติใช้ $P_{ij} = \frac{1}{J}$
  - Mean

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{j=1}^{J} R_{ij}}{J} \tag{11}$$

  - Variance

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{J} (R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{J} \tag{12}$$

Estimation of Mean and Variance of Returns

- Note that the formular above is summed over states or possibilities.
- Most of the time, we observe only return in different periods not returns in different states. But we will assume "ergodicity", which will allow us to imagine that different periods are equivalent to different states.
- Hence, we will usually estimate the mean of asset return by

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{it}}{T} \tag{13}$$

- Similar, we estimate a variance by

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \bar{R}_i)^2}{T} \tag{14}$$

Portfolio

- กำหนดให้ X_i เป็นสัดส่วนการลงทุน (weighting) ที่นักลงทุนเลือกลงทุน หลักทรัพย์ที่ i และกำหนดให้ N เป็นจำนวนหลักทรัพย์ทั้งหมดที่นักลงทุนเลือกลงทุน

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \tag{15}$$

- ค่าเฉลี่ยของ portfolio P คือ

$$E(R_P) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{N} X_i E(R_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i \tag{16}$$

- ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของ portfolio P หาได้จากค่าเฉลี่ยของแต่ละหลักทรัพย์

$$\bar{R}_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i \tag{17}$$

equal weighting

เป็นการถ่วงน้ำหนักของสัดส่วนการลงทุนของสินทรัพย์เท่ากัน

$$w_i^E = \frac{1}{N} \tag{18}$$

เมื่อ N คือ จำนวนสินทรัพย์
ข้อเสีย หุ้นที่มีขนาดใหญ่(market capital) จะให้ความสำคัญน้อยกว่าที่ควรจะเป็น

Value weighting

เป็นการถ่วงน้ำหนักของสัดส่วนการลงทุนของสินทรัพย์ตาม market-capitalization

$$w_i^m = \frac{Q_i p_i}{\sum_{j=1}^{N} Q_j p_j} \tag{19}$$

เมื่อ Q_i คือ จำนวนหน่วยลงทุนของสินทรัพย์ i p_i คือ ราคาของสินทรัพย์ i N คือ จำนวนสินทรัพย์ บางครั้ง อาจใช้ค่าของ free float เนื่องจากเป็นปริมาณ ของหน่วยการลงทุนจริงในตลาด เรียกว่า float-adjust market-capitalization weighting

$$w_i^{mf} = \frac{f_i Q_i p_i}{\sum_{j=1}^{N} f_i Q_j p_j} \tag{20}$$

เมื่อ f_i คือ สัดส่วน free float ในตลาด i

ข้อเสีย เมื่อราคาสินทรัพย์มีการเปลี่ยนแปลง ทำให้ค่าน้ำหนักนั้นมีการเปลี่ยนแปลงด้วย โดยถ้าสินทรัพย์ตัวไหนมีราคาที่สูงขึ้น ทำให้ค่าน้ำหนักมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย

Data

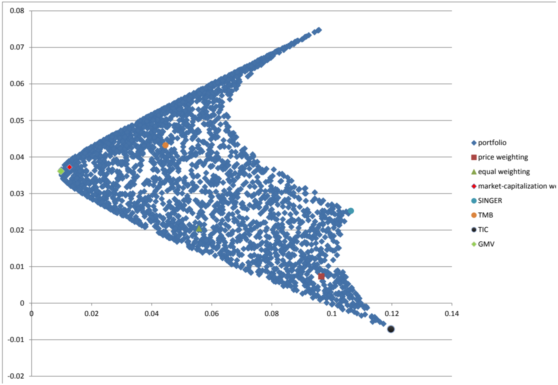
Table: Monthly data from SETSMART

		closed price			q_share_list			freefloat(%)		
year	month	SINGER	TMB	TIC	SINGER	TMB	TIC	SINGER	TMB	TIC
2015	1	15.6	3.1	27	4212000000	43678764288	23499283	59.97	43.8	54.81
2015	2	13.7	3.02	29	3699000000	43678764288	23499283	59.97	43.8	54.81
2015	3	12.4	2.98	27	3348000000	43678764288	23499283	59.97	43.8	44.93
2015	4	14.3	2.6	33.25	3861000000	43749499615	23499283	59.97	43.88	44.93
2015	5	12.9	2.54	28.5	3483000000	43749499615	23499283	59.97	43.88	44.93
2015	6	13.8	2.34	28.25	3726000000	43749499615	23499283	59.97	43.88	44.93
2015	7	12.4	2.34	27	3348000000	43749499615	23499283	59.97	43.88	44.93
2015	8	12.6	2.26	27.25	3402000000	43749499615	23499283	59.97	43.88	44.93

		gross return			weighting			
year	month	SINGER	TMB	TIC	price	equal	market-capitalization	float-adjust
2015	1							
2015	2	0.878205	0.974194	1.074074	1.000438	0.975491	0.943245	0.936361
2015	3	0.905109	0.986755	0.931034	0.925965	0.940966	0.959988	0.954082
2015	4	1.153226	0.872483	1.231481	1.180416	1.08573	0.965048	0.985419
2015	5	0.902098	0.976923	0.857143	0.880614	0.912055	0.952176	0.946738
2015	6	1.069767	0.92126	0.991228	1.013292	0.994085	0.969848	0.98058
2015	7	0.898551	1	0.955752	0.939228	0.951434	0.96682	0.959489
2015	8	1.016129	0.965812	1.009259	1.008657	0.997067	0.982337	0.98598
	σ	0.10634	0.044581	0.119721	0.096482	0.055743	0.012621	0.964093
	$\bar{r}$	0.025273	0.043225	-0.00714	0.007342	0.020453	0.03722	0.035907

Opportunity Set in Mean-Standard Deviation Plane

- การจัดสรรกองทุนในรูปแบบต่างๆ แล้วแสดงในรูปของ Standard Deviation และ Mean เป็นไปไม่ได้ที่จะออกไปสู่ด้านนอกของรูป (outside the opportunity set is not feasible.)



Estimation of Variance of Returns

- Variance ของ portfolio return คือ

$$
\begin{aligned}
Var(R_P) &= Var(\sum_{i=1}^{N} X_i R_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j Cov(R_i, R_j) && (21) \\
&= \sum_{i=1}^{N} X_i^2 Var(R_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq i}^{N} X_i X_j Cov(R_i, R_j) && (22)
\end{aligned}
$$

- หรือเขียนใหม่ได้ในรูป

$$
\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq i}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \qquad (23)
$$

Estimation of Variance of Returns

- สมมติให้ สัดส่วนการลงทุนของทุกหลักทรัพย์เท่ากัน

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^2}{N^2} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\sigma_{ij}}{N^2} \quad (24)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^2}{N} + \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\sigma_{ij}}{N(N-1)} \quad (25)$$

- ค่าประมาณของ variance คือ

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{N}\bar{\sigma}_j^2 + \frac{N-1}{N}\bar{\sigma}_{jk} \quad (26)$$

- ถ้า N มี**ค่าใหญ่มาก**แล้ว พจน์แรกจะมี**ค่าเข้าใกล้ 0** แต่ พจน์ที่ 2 ยังคงมีค่าอยู่
- พจน์แรกถูกเรียกว่า “diversifiable”.
- พจน์ที่ 2 ถูกเรียกว่า “non-diversifiable”.

Number of security	Expected portfolio return	standard deviation of portfolio
1	1.001395	0.01228
2	1.001148	0.010691
4	1.000959	0.009602
6	1.000952	0.008933
8	1.000899	0.008657
10	1.001355	0.00892
15	1.001287	0.008252
20	1.00092	0.007115
25	1.000736	0.007409
30	1.000672	0.006772
35	1.000593	0.006392
40	1.000591	0.006288
45	1.000742	0.006269
50	1.000665	0.005845
60	1.000761	0.005646
70	1.000868	0.00679
80	1.000781	0.006817
90	1.000815	0.006621
100	1.000898	0.006293
125	1.000967	0.005958
150	1.000946	0.005499
175	1.000843	0.005322
200	1.000888	0.005287
250	1.000921	0.005065
300	1.000895	0.004988
350	1.00093	0.004954
400	1.000956	0.004947
450	1.000967	0.00492
500	1.000969	0.004849

Mean-Variance portfolios

Mean-Variance portfolios

Feasible combination of return and dispersion

- กำหนดให้ นักลงทุนเลือก portfolio ที่ลงทุนในหลักทรัพย์ต่างๆ ด้วยสัดส่วน: $(X_i)_{i=1}^{N}$ แล้ว

$$\sum_i X_i = 1 \tag{27}$$

  บางครั้งเราเรียกว่า ข้อจำกัดของ portfolio (portfolio constraint)

- ความคาดหวังของผลตอบแทนเฉลี่ย (the expected mean) คือ

$$\bar{R}_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i \tag{28}$$

- ความคาดหวังของความผันผวน (the expected variance) คือ

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} X_i X_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{29}$$

  เมื่อ $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ และ ρ_{ij} คือ correlation ของผลตอบแทน R_{it} และ R_{jt}

- เราจะหา $(\bar{R}_P, \sigma_P^2)$ จาก portfolio $(X_i)_{i=1}^{N}$.

Example with Perfect Correlation: $\rho = 1$

- สมมติให้มี 2 หลักทรัพย์ คือ C และ S.

$$X_C + X_S = 1 \Rightarrow X_S = 1 - X_C \tag{30}$$

- ค่าเฉลี่ย (mean) ของ portfolio คือ

$$\bar{R}_P = X_C\bar{R}_C + (1 - X_C)\bar{R}_S \tag{31}$$

- ความแปรปรวน (variance) ของ portfolio คือ

$$\sigma_P^2 = \left[X_C^2\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\sigma_S^2 + 2X_C(1 - X_C)\sigma_C\sigma_S\right] \tag{32}$$

$$= \left[X_C\sigma_C + (1 - X_C)\sigma_S\right]^2 \tag{33}$$

- แล้วเราสามารถหาสัดส่วนของ X_c

$$\sigma_P = X_C\sigma_C + (1 - X_C)\sigma_S \tag{34}$$

$$\Rightarrow \quad X_c = \frac{\sigma_P - \sigma_S}{\sigma_C - \sigma_S} \tag{35}$$

Example with Perfect Correlation: $\rho = 1$

- ค่าเฉลี่ย (mean) ของ portfolio คือ

$$\bar{R}_P = \frac{\sigma_P - \sigma_S}{\sigma_C - \sigma_S}\bar{R}_C + (1 - \frac{\sigma_P - \sigma_S}{\sigma_C - \sigma_S})\bar{R}_S \tag{36}$$

หรือ

$$\bar{R}_P = \frac{\bar{R}_C - \bar{R}_S}{\sigma_C - \sigma_S}\sigma_P + \bar{R}_S + \frac{\sigma_S}{\sigma_C - \sigma_S}(\bar{R}_S - \bar{R}_C) \tag{37}$$

- ค่าเฉลี่ย (mean) ของ portfolio เป็นสมการเชิงเส้นกับ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ portfolio (σ_P) **linear in** σ_P

Example with Perfect Correlation: $\rho = 0.5$

- ความแปรปรวน (variance) ของ portfolio คือ

$$\sigma_P^2 = \left[X_C^2\sigma_C^2 + (1-X_C)^2\sigma_S^2 + 2X_C(1-X_C)\sigma_C\sigma_S(\frac{1}{2})\right] \tag{38}$$

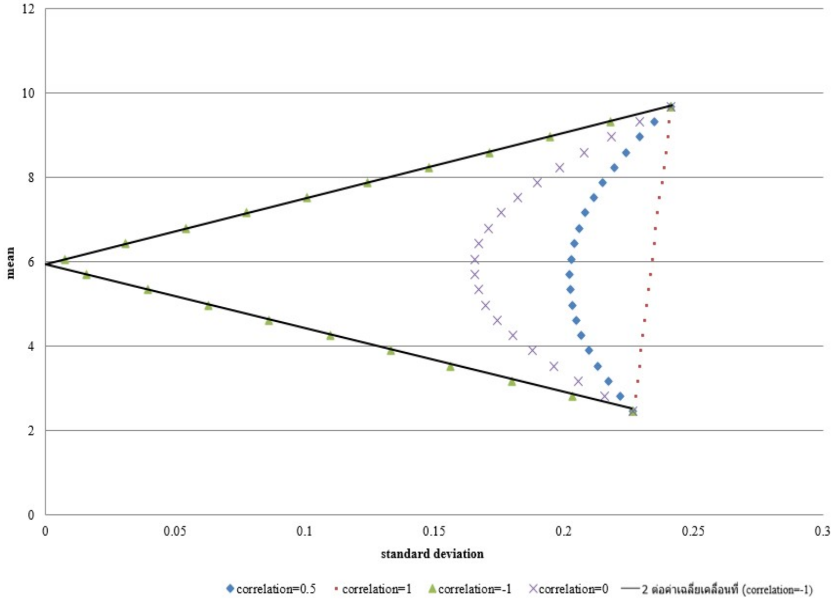
- ค่าเฉลี่ย (mean) ของ portfolio คือ

$$\bar{R}_P = X_C\bar{R}_C + (1-X_C)\bar{R}_S \Rightarrow X_C = \frac{\bar{R}_P - \bar{R}_S}{\bar{R}_C - \bar{R}_S} \tag{39}$$

- ดังนั้น ความแปรปรวน (variance) ของ portfolio คือ

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \left(\frac{\bar{R}_P - \bar{R}_S}{\bar{R}_C - \bar{R}_S}\right)^2 \sigma_C^2 + (1 - \frac{\bar{R}_P - \bar{R}_S}{\bar{R}_C - \bar{R}_S})^2\sigma_S^2 & (40) \\ &+ \frac{\bar{R}_P - \bar{R}_S}{\bar{R}_C - \bar{R}_S}(1 - \frac{\bar{R}_P - \bar{R}_S}{\bar{R}_C - \bar{R}_S})\sigma_C\sigma_S & (41) \end{aligned}$$

- ค่าเฉลี่ย (mean) ของ portfolio **ไม่เป็นสมการเชิงเส้น**กับ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ portfolio (σ_P) (non-linear in σ_P)



12
10
8
6
4
2
0
mean
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
standard deviation
correlation=0.5
correlation=1
correlation=-1
correlation=0
2 ต่อค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (correlation=-1)

Global Minimum Variance Portfolio

- พิจารณาเมื่อ correlation ρ มีค่าใดๆ
- ความแปรปรวน (variance) ของ portfolio คือ

$$\sigma_P^2 = X_C^2\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\sigma_S^2 + 2X_C(1 - X_C)\rho\sigma_C\sigma_S \tag{42}$$

- เพื่อที่จะหา "the global minimum variance portfolio" เราต้องหาอนุพันธ์ของ σ_P^2 เทียบกับ X_C and ให้เท่ากับ 0:

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial X_C} = 0 \tag{43}$$

ดังนั้นสัดส่วนของ X_C^{GMV} ที่ทำให้ความแปรปรวนมีค่าน้อยที่สุด (minimum variance) คือ

$$X_C^{GMV} = \frac{\sigma_S^2 - \sigma_C\sigma_S\rho}{\sigma_C^2 + \sigma_S^2 - 2\sigma_C\sigma_S\rho} \tag{44}$$

Optimal Portfolio Problem with Mean-Variance Portfolio

- Markowitz's mean-variance portfolio selection problem:

$$\min_{X_i} \sigma_P^2 \tag{45}$$

subject to

$$\bar{R}_P = \sum_i X_i \bar{R}_i \tag{46}$$

$$\sum_i X_i = 1 \tag{47}$$

Mean-Variance Portfolio

- Let $\mathbf{R}$ and $\mathbf{X}$ be the (vector of) returns and weight of all assets, i.e.,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \tag{48}$$

- R_i is the return of asset i, which is a random variable with mean $\bar{R}_i$.
- Let Σ denote the variance-covariance matrix of $\mathbf{R}$, i.e.,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(R_1) & \dots & Cov(R_1, R_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(R_n, R_1) & \dots & Var(R_n) \end{pmatrix} \tag{49}$$

Mean-Variance Problem

- The problem is to choose portfolio weights, $\mathsf{X} = (X_i)_{I=1}^{n}$ to minimize variance given that the expected return is R_p, i.e.,

$$\min_{\mathsf{X}} \mathsf{X}^T \Sigma \mathsf{X} \tag{50}$$

subject to

$$\mathsf{1}^T\mathsf{X} = 1 \tag{51}$$

$$\bar{\mathsf{R}}^T\mathsf{X} = R_p. \tag{52}$$

- Note that short-sales are allowed in this case.
- Without risk-free asset, Σ is non-singular.

Mean-Variance Problem: Lagrangian

- Lagrangian is

$$\mathcal{L} = \mathsf{X}^T \Sigma \mathsf{X} + \mu_1 \left(1 - \mathbf{1}^T \mathsf{X}\right) + \mu_2 \left(R_p - \bar{\mathsf{R}}^T \mathsf{X}\right) \tag{53}$$

where μ_1 and μ_2 are the Lagrange multipliers for portfolio constraint (51), and expected return constraint (expected-return).

- An optimal solution must satisfy the following first-order conditions (FOCs):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathsf{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\Sigma \mathsf{X} - \mu_1 \mathbf{1} - \mu_2 \bar{\mathsf{R}} = 0 \tag{54}$$

$$\Rightarrow \quad \mathsf{X} = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} \left(\mu_1 \mathbf{1} + \mu_2 \bar{\mathsf{R}}\right) \tag{55}$$

$$\Rightarrow \quad \mathsf{X} = \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \mu_1 \\ 2 & \mu_2 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Mean-Variance Problem: Lagrangian

- Multiplying both size with $\mathbf{1}^T$ both sides gives

$$\mathbf{1}^T \mathsf{X} = \mathbf{1}^T \left(\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(\mu_1 \mathbf{1} + \mu_2 \bar{\mathsf{R}}\right)\right) \tag{57}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mu_1 + \frac{1}{2}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathsf{R}}\mu_2. \tag{58}$$

- Then applying the portfolio constraint (51) makes the left hand side equal to 1:

$$1 = \frac{1}{2}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mu_1 + \frac{1}{2}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathsf{R}}\mu_2. \tag{59}$$

- Similarly, multiplying the same equation with R^T both sides and then applying the expected return constraint (expected-return):

$$\bar{\mathsf{R}}^T \mathsf{X} = \frac{1}{2}\bar{\mathsf{R}}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mu_1 + \frac{1}{2}\bar{\mathsf{R}}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathsf{R}}\mu_2$$

$$R_p = \frac{1}{2}\bar{\mathsf{R}}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mu_1 + \frac{1}{2}\bar{\mathsf{R}}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathsf{R}}\mu_2. \tag{60}$$

Mean-Variance Problem: Lagrangian

- We will now using (59) and (60) to solve for μ_1 and μ_2:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathsf{R}} \\ \bar{\mathsf{R}}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix}. \tag{61}$$

- Let denote

$$\mathsf{A} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathsf{R}} \\ \bar{\mathsf{R}}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix}^T \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix}. \tag{62}$$

- we can now write

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Mean-Variance Problem: Mean-Variance Optimal Portfolio

- Substituting (63) into (56) gives an optimal portfolio:

$$\mathsf{X} = \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix}. \tag{64}$$

- Then we can calculate the variance of a portfolio as

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathsf{X}^T \Sigma \mathsf{X} \\
&= \left[\Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix} \right]^T \Sigma \left[\Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & R_p \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & R_p \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{\mathsf{R}} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix} \\
\sigma_p^2 &= \begin{pmatrix} 1 & R_p \end{pmatrix} A^{-1} A A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_p \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R_p \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mean-Variance Problem: Mean-Variance Optimal Portfolio

- The last equation forms a relationship between mean return R_p and standard deviation σ_p of an optimal portfolio.
- In fact, the frontier will be a hyperbola.