# Asset Pricing

ผศ.ดร. วีระชาติ กิเลนทอง
มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

# Main Issues

- เราจะตั้งราคาของหลักทรัพย์ (Asset) ได้อย่างไร?
- discount rates ควรจะเป็นอะไร ?

# Pricing an Asset using its Payoffs

- ในกรณีที่ discount rate นั้นคงที่, นักศึกษาสามารถตั้งราคา โดยใช้ present value

$$P_{it} = \frac{y_{i,t+1}}{1+k} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_{i,t+j}}{(1+k)^j} \tag{1}$$

  เมื่อ $y_{i,t}$ คือ the payoff/dividend ของ หลักทรัพย์ที่ i ณ เวลา t และ k คือ the discount rate.
- การถือหลักทรัพย์ที่มีการจ่ายคืน (payoff) ในอนาคต และบางครั้งหลักทรัพย์พวกนี้ถูกเรียกว่า ``ex-dividend''.
- The pricing equation คือ

$$P_{it} = \frac{y_{i,t+1}}{1+k} + \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_{i,t+1+j}}{(1+k)^j}}{1+k} \tag{2}$$

$$= \frac{y_{i,t+1} + P_{i,t+1}}{1+k} \tag{3}$$

- จากแบบจำลอง หลักทรัพย์นี้จะจ่ายคืน ใน period ถัดไปคือ $y_{i,t+1} + P_{i,t+1}$.

# Rational Bubbles

- อย่างไรก็ตาม บางครั้งราคาอาจสูงกว่ามูลค่าที่เราจะสามารถคำนวณได้โดยใช้ข้อมูลพื้นฐาน (fundamental value)
- เราอาจจะเรียกส่วนเกินนี้ว่า ``Bubble''
- เพื่อความเข้าใจนิยามของ Bubble เราจะแสดงให้ เห็นได้จากแบบจำลองต่อไปนี้

# Bubbles

เพื่อความเข้าใจนิยามของ Bubble เราจะแสดงให้เห็นได้จากแบบจำลองต่อไปนี้

$$P_t = E_t\left(\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{R+1}\right) = E_t\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{1}{R+1}\right)^i D_{t+i}\right] + E_t\left[\left(\frac{1}{1+R}\right)^i P_{t+k}\right] \quad (4)$$

จัดรูปแล้วจะได้

$$P_t = P_{Dt} + B_t \quad (5)$$

เมื่อ พจน์ที่ 2 คือ ``bubbles'' ซึ่งบอกถึงมูลค่าของหลักทรัพย์ที่เป็นผลมาจากปัจจัยพื้นฐานของหลักทรัพย์ (fundamentals) และ

- เราเรียก $P_{Dt} = E_t\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{R+1}\right)^i D_{t+i}$ ว่า "fundamental value"
- เราเรียก $B_t = E_t\left(\frac{B_{t+1}}{1+R}\right)$ ว่า "rational bubbles" โดยที่คำว่า ``rational'' มาจากการที่ $B_t$ สอดคล้องกับ rational expectation

# ตัวอย่างของสถานการณ์ที่ไม่มี Rational Bubbles

ตัวอย่าง : ถ้าเราสมมติให้ไม่มีการจ่ายเงินปันผลและกำหนดอัตราผลตอบแทนคงที่

$$
\begin{aligned}
E_t(1+R_{t+1}) &= E_t\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) = (1+R) \\
B_t = P_t &= \frac{E_t(P_{t+1})}{1+R} \\
B_{t+1} = P_{t+1} &= (1+R)P_t + \epsilon_{t+1}
\end{aligned}
$$

ถ้าเรารู้ว่า ฟองสบู่ (bubble) จะแตกในอนาคต ราคาวันนี้ควรจะต้องเป็น 0 ($P_t = 0$) หมายความว่าในแบบจำลองนี้ไม่มีฟองสบู่ (bubble) เพราะราคาในสมการนี้ขึ้นอยู่กับค่า $\epsilon_{t+1}$ เท่านั้น ซึ่งทำให้ $E_t(B_{t+1})$=0

# ตัวอย่างของสถานการณ์ที่มี Rational Bubbles

ตัวอย่าง Blanchard and Watson (1982) ได้สมมติว่า

$$B_{t+1} = \begin{cases} \frac{1+R}{\pi}B_t + \epsilon_{t+1} & , \quad \text{ความน่าจะเป็น}\pi \\ \epsilon_{t+1} & , \quad \text{ความน่าจะเป็น}1-\pi \end{cases} \tag{6}$$

- ถ้า ฟองสบู่ (bubble) แตกในอนาคตที่ความน่าจะเป็นคือ $1-\pi$ ดังนั้นหมายความว่า $E_t(B_{t+1})=0$
- ถ้า ฟองสบู่ (bubble) ไม่แตกที่ความน่าจะเป็นคือ $\pi$ หมายความว่า ฟองสบู่ (bubble) จะมีการขยายตัวเป็น $\frac{1+R}{\pi}B_t - 1$

# Rational Bubbles ไม่ใช่ Predictability

- Rational bubble ไม่สามารถอธิบาย observed predictability of stock returns
- ความสามารถในการพยากรณ์อัตราผลตอบแทน (return predictability) ไม่เกี่ยวข้องกับการมี bubbles
- ในอีกด้านหนึ่ง หากเราประยุกต์ใช้ mean-preserving spread concept เราจะสามารถสรุปได้ว่า bubbles จะมีผลทำให้ price volatility สูงขึ้น
- อาจจะเป็นไปได้ว่า Rational bubbles มีผลกระทบต่อราคาอย่างมาก แต่อาจจะไม่มีผลต่ออัตราผลตอบแทนมากนัก เนื่องจาก bubbles มีผลทำให้ราคาในแต่ละช่วงสูงขึ้นพอๆ กัน และ การเคลื่อนที่ของราคายังคงเป็น ``persistent'' แต่มันไม่มีผลกับอัตราผลตอบแทน

# Pricing Equation and Stochastic Discount Factor

- The pricing equation now becomes

$$P_i = E\left(m_{t+1} z_{t+1}\right) \tag{7}$$

  where $z_{i,t+1}$ is the total payoff in the next period, $t+1$, and $m_{t+1}$ is called stochastic discount factor or pricing kernel.

- That is, to price a risky asset we need to take adjust the discounting accordingly. So, the ultimate goal of asset pricing is to find the stochastic discount factor (SDF) $m_{t+1}$.
- NOTE: the above equation is true for any asset i but $m_{t+1}$ does not depend on i. There must be a unique $m_{t+1}$?

# Basic Probability Theory

- Let m be a random variable with support $\mathcal{M}$. Its CDF and pdf are defined as, respectively,

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \Pr(m \leq z) && (8) \\
f(m) &= \frac{dF(z)}{dz}\Big|_{z=m} && (9)
\end{aligned}
$$

- Its expectation is

$$E(m) = \int_{\Omega} z f(z) dz \qquad (10)$$

- Its variance is

$$Var(m) = \int_{\Omega} (z - E(y))^2 f(z) dz \qquad (11)$$

# Law of One Price (LOP)

- To simplify the notation, we will drop the time index unless stated otherwise. That is, the payoff means next period payoff from now on.
- Let $\mathcal{Z}$ be the payoff space.
- Let $z_i$ be the next period payoff of asset i and $z \in \mathcal{Z}$ the vector of next period payoffs of all assets.
- Let $\alpha_i$ be the weight of asset i in the portfolio $\alpha$.
- The Law of One Price states that

$$\text{If } \sum_i \alpha_i z_i = 0, \text{ then } \sum_i \alpha_i P_i = 0 \tag{12}$$

or equivalently,

$$\text{If } \sum_i \alpha_i z_i = \sum_i \psi_i z_i, \text{ then } \sum_i \alpha_i P_i = \sum_i \psi_i P_i \tag{13}$$

- In words, if two portfolios have the same payoff, they must have the same price.

# Law of One Price implies a Unique SDF

- Theorem: there exists a unique $m^* \in \mathcal{Z}$ such that for any asset i we can price

$$P_i = E\left(m^* z_i\right) \tag{14}$$

- The rigorous proff would involve the Riesz-Frechet representation theorem in Hilbert sapce (Functional Analysis). Here will use a simple (not complete proof just to get an idea).
- First, we ll have to claim that LOP implies that the pricing function is linear in payoff: there is m such that

$$P_i = E\left(m z_i\right) \tag{15}$$

  We not going to prove this. Again refer to the representation theorem.

# Law of One Price implies a Unique SDF: Implications

- This theorem holds regardless of market structures; either complete or incomplete markets.
- It guarantees that there is one m that prices all assets in the world. The only question is that what is it!

# No Arbitrage Opportunity (NOA)

- The No Arbitrage Opportunity Assumtpion states that:

$$\begin{aligned} \text{If } \sum_i \alpha_i z_i &\geq 0 \text{ and } \sum_i \alpha_i z_i \neq 0 \text{ (with Pr} > 0), \\ \text{then } \sum_i \alpha_i P_i &> 0 \end{aligned}$$

- That is, A portfolio with a positive payoff, must have a positive price.

# NOA versus LOP

- Are LOP and NOA the same?
- Answer: NO!
- Example: consider the following asset with $z_1 = [1, 0]$ and $z_2 = [0, 1]$ with prices $P_1 = 1$ and $P_2 = -1$.
- The LOP holds in this case. Discuss!
- But the NOA does not hold. Discuss!
- The key point here is that m can be negative here.

# NOA and Positive SDF

- Theorem: If LOP and NOA hold, then there exists a strictly positive SDF $\bar{m} > 0$ (with probability 1) such that

$$P_i = E\left(\bar{m} z_i\right), \forall z_i \in \mathcal{M} \tag{16}$$

- The rigorous proof of this theorem is based on the Hahn-Banach theorem in Hilbert Space or the Separating Hyperplane Theorem in standard Euclidean space.
- Here we will perform a simple but incomplete proof just to get an idea.

# NOA and SDF: Implications

- This theorem holds regardless of market structures; either complete or incomplete markets.
- It guarantees that there is one positive m that prices all assets in the world. The only question is that what is it!
- Though it is still possible to have a non-positive m that prices all assets in the world.

# Mean-Variance Frontier

- We can derive the Mean-Variance Frontier using this pricing function.
- Recall: the pricing function is

$$P_i = E(mz_i) \Rightarrow E\left(m\frac{z_i}{P_i}\right) = 1 \quad (17)$$

$$E(mR_i) = 1 \quad (18)$$

- Recall:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (19)$$

- Hence, we can rewrite the pricing function as

$$1 = E(mR_i) = \text{Cov}(m, R_i) + E(m)E(R_i) \quad (20)$$

$$\Rightarrow E(R_i) - \frac{1}{E(m)} = -\frac{\text{Cov}(m, R_i)}{E(m)} \quad (21)$$

# Mean-Variance Frontier

- When the riskless asset exists, teh pricing equation must apply to the riskless asset as well:

$$1 = E\left(mR_F\right) = R_F E(m) \Rightarrow E(m) = \frac{1}{R_F} \tag{22}$$

- Hence, we can write the preceding pricing function as

$$E(R_i) - R_F = -\frac{Cov\left(m, R_i\right)}{E(m)} \tag{23}$$

- Recall: a correlation must satisfy the following property

$$\left|Corr\left(m, R_i\right)\right| \leq 1 \tag{24}$$

Hence,

$$\begin{aligned}\left|Corr\left(m, R_i\right)\right| &= \left|\frac{Cov\left(m, R_i\right)}{\sigma(m)\sigma(R_i)}\right| \Rightarrow \frac{\left|Cov\left(m, R_i\right)\right|}{\sigma(m)\sigma(R_i)} \leq 1 \\ &\Rightarrow \left|Cov\left(m, R_i\right)\right| \leq \sigma(m)\sigma(R_i)\end{aligned} \tag{25}$$

# Mean-Variance Frontier

- We now can rewrite the pricing equation as

$$\left|E(R_i) - R_F\right| = \frac{\left|\mathrm{Cov}\left(m, R_i\right)\right|}{E(m)} \leq \frac{\sigma(m)\sigma(R_i)}{E(m)} \tag{26}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{E(R_i) - R_F}{\sigma(R_i)}\right| \leq \frac{\sigma(m)}{E(m)} \tag{27}$$

  where the LHS is termed ``Sharpe Ratio''.
- This implies that the slope of the frontier is equal to $\frac{\sigma(m)}{E(m)}$.

# Risk Premium

- Risk Premium คืออะไร? (ผลตอบแทนที่ชดเชยความเสี่ยงที่เพิ่มขึ้น)

$$\text{Risk Premium} = R_{it} - R_{ft} \tag{28}$$

- Risk Premium สำคัญอย่างไร?
  - ถ้าเราลงทุนที่มีความเสี่ยงเราควรจะได้รับผลตอบแทนที่มากขึ้น
- ความเสี่ยงจากอะไร ?
  - มีหลายปัจจัย ซึ่งเราจะเน้นในส่วนการบริโภค(consumption growth)
- Puzzle คืออะไร?
  - แบบจำลองด้านเศรษฐศาสตร์มหาภาคไม่สามารถอธิบายความคาดหวังส่วนเกินของตลาดทุน (Expected Equity Premium) ที่มีค่าสูง (Equity Premium Puzzle) และ ความคาดหวังผลตอบแทนโดยปราศจากความเสี่ยง (Risk-Free Rate Puzzle) ที่มีค่าต่ำ

# Risk Premium

- CAPM

$$\text{risk premium}_i = E(r_i) - E(r_f) = E(r_m - r_f)\beta \tag{29}$$

โดยเราจะสังเกตได้ว่า สำหรับแบบจำลองนี้

  - ความเสี่ยงคือ $\beta$
  - ราคาของความเสี่ยงคือ (Market Risk Premium) $E(r_m - r_f)$

- APT

$$\text{risk premium}_i = E(r_i) - E(r_f) = \sum_{i=1}^{j} \lambda_j \beta_j \tag{30}$$

  - ความเสี่ยงในแต่ละปัจจัยคือ $\beta_j$
  - ราคาของความเสี่ยงในแต่ละปัจจัยคือ $\lambda_j$

# The equity premium

- What is the equity premium?

$$\text{equity premium} = E(r_m - r_f) \tag{31}$$

- ความเสี่ยงที่ตลาดสนใจ(ให้ราคา)คืออะไร?
- สามารถคำนวณได้จากอะไร?
  - จากข้อมูล (historical data)

# The equity Premium (historical data)

- $E(r_m)$ คือ ค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนของตลาด (นำมาจาก FEDR return)
- $E(r_f)$ คือ ค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนที่ไม่มีความเสี่ยง (ค่าเฉลี่ยของเงินฝากประจำเดือน จากธนาคารพาณิชย์ถูกรวบรวมโดย ธนาคารแห่งประเทศไทย )

Table: The mean and standard derivation of The total market return ($r_m$) and risk free rate($r_{f,t}$) querterly data since 2000-2014

| | mean | standard derivation |
|---|---|---|
| $r_m$ | 0.0276 | 0.1248 |
| $r_f$ | 0.0055 | 0.00042 |
| $r_m - r_f$ | 0.0221 | |

# The equity premium (pricing equation)

## Consumption-Based Asset Pricing (Lucus 1978)

- Lucus (1978) หา The SDF ($M_{t+1}$) จากแบบจำลอง ``a consumption-based asset pricing''

$$U = \max_{C_t} E\left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(C_t)\right) \tag{32}$$

และข้อจำกัดคือ

$$W_{t+1} = (W_t - C_t) R_{c,t+1} \tag{33}$$

- จากแบบจำลองนี้ ทำให้เราสามารถเขียนในรูปใหม่ได้เรียกว่า Euler equation

$$E_t\left(\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} R_{c,t+1}\right) = 1 \tag{34}$$

# The equity premium (pricing equation)

## Consumption-Based Asset Pricing (Lucus 1978)

- เมื่อ
  - $\beta$ คือ อัตราส่วนลดของความพึงพอใจ
  - $C_t$ คือ การบริโภคของ ตัวแทน (agent) ณ ช่วงเวลา t
  - $W_t$ คือ ความมั่งคั่งของ ตัวแทน (agent) ณ ช่วงเวลา t
  - $R_{c,t}$ คือ ผลตอบแทนรวมของ ตลาด is (``The market'' gross total return)
  - $u(C_t)$ คือ ฟังชันก์ความพึงพอใจ ณ ช่วงเวลา t

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{35}$$

- The SDF ($M_{t+1}$) คือ

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma} \tag{36}$$

- ดังนั้น SDE ขึ้นอยู่กับ แบบจำลองของ consumption growth

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- สมมติให้ $G_{c,t} = \frac{C_{t+1}}{C_t}$ คือ independent and identically distributed log-normal (i.i.d. log-normal)
- แบบจำลอง pricing equation

$$E_t(M_{t+1} * R_{i,t+1}) = 1 \tag{37}$$

- logarithm ของ pricing equation คือ

$$E_t(m_{t+1} + r_{i,t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(m_{t+1} + r_{i,t+1}) = 0 \tag{38}$$

$$E_t(m_{t+1}) + E_t(r_{i,t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(m_{t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(r_{i,t+1}) + Cov_t(m_{t+1}, r_{i,t+1}) = 0 \tag{39}$$

เมื่อ $m_{t+1} = \log(M_{t+1}), r_{i,t+1} = \log(R_{i,t+1})$

- อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของ หลักทรัพย์ i ($r_{i,t} = \log R_{i,t}$) คือ

$$E_t(r_{i,t+1}) = -(E_t(m_{t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(m_{t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(r_{i,t+1}) + Cov_t(m_{t+1}, r_{i,t+1})) \tag{40}$$

# The equity Premium (pricing equation)

- The conditional expected riskfree

$$E_t(r_{f,t+1}) = -E_t(m_{t+1}) - \frac{1}{2}Var_t(m_{t+1}) \tag{41}$$

- The risk premium สำหรับ หลักทรัพย์ที่ i

$$E_t(r_{i,t+1} - r_{f,t+1}) = -Cov_t(m_{t+1}, r_{i,t+1}) - \frac{1}{2}Var_t(r_{i,t+1}) \tag{42}$$

- The equity premium

$$E_t(r_{m,t+1} - r_{f,t+1}) = -Cov_t(m_{t+1}, r_{m,t+1}) - \frac{1}{2}Var_t(r_{m,t+1}) \tag{43}$$

- สังเกตว่า ถ้าเรารู้ $m_{t+1}$ หรือ moment (mean variance covariance) ของ $m_{t+1}$ เรา สามารถหา equity premium ได้

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- กรณีที่ iid lognormal แล้ว The unconditional expected =The conditional expected นั้นคือ
  - The equity premium สำหรับ หลักทรัพย์ที่ i

$$E(r_{i,t+1} - r_{f,t+1}) = -Cov(m_{t+1}, r_{i,t+1}) - \frac{1}{2}Var(r_{i,t+1}) \tag{44}$$

  - The conditional expected riskfree

$$E_t(r_{f,t+1}) = -E_t(m_{t+1}) - \frac{1}{2}Var_t(m_{t+1}) \tag{45}$$

- The SDF ($M_{t+1}$)

$$m_{t+1} = \log M_{t+1} = \log\beta - \gamma g_{c,t+1} \tag{46}$$

$$E(m_{t+1}) = \log\beta - \gamma\mu_c \tag{47}$$

$$var(m_{t+1}) = \gamma^2\sigma_c^2 \tag{48}$$

- เมื่อ $\mu_c$ is ความคาดหวังของ $g_{c,t}$ and $\sigma_c^2$ ความแปรปรวนของ $g_{c,t}$

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- Expected risk free rate is

$$E(r_{f,t+1}) = -\log\beta + \gamma\mu_c - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2 \tag{49}$$

- Equity premium is

$$E(r_{m,t+1} - r_{f,t+1}) = \gamma \text{cov}(g_{c,t+1}, r_{m,t+1}) - \frac{1}{2}\text{var}(r_{m,t+1}) \tag{50}$$

  - ราคาของความเสี่ยง คือ ``$\gamma$''.
  - ความเสี่ยง คือ ``$\text{cov}(g_{c,t+1}, r_{m,t+1})$''.
  - $\mu_c, \sigma_c^2, \text{cov}(g_{c,t+1}, r_{m,t+1})$ และ $\text{var}(r_{m,t+1})$ คำนวณ ได้จาก observed data

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- สำหรับข้อมูล ในอเมริกา ในช่วงปี 1926-1994
  - $\mu_c = 0.017$
  - $\sigma_c = 0.033$
  - $cov(g_{c,t+1}, r_{m,t+1}) = 0.003$
  - $var(r_{m,t+1}) = 0.028$
  - $E(r_m - r_f) = 0.041$
  - $E(r_f) = 0.0183$
  - $\beta = 0.98$

  ดังนั้น $\gamma \approx 18.33$
- จากงานของ Mehra and Prescott (1985), ช่วงที่สมเหตุสมผล คือ $1 \leq \gamma \leq 10$
- ปัญหานี้ถูกเรียกว่า ``equity premium puzzle''

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- สำหรับข้อมูล ในอเมริกา ในช่วงปี 1926-1994
  - $\mu_c = 0.017$
  - $\sigma_c = 0.033$
  - $\text{cov}(g_{c,t+1}, r_{m,t+1}) = 0.003$
  - $\text{var}(r_{m,t+1}) = 0.028$
  - $E(r_m - r_f) = 0.041$
  - $E(r_f) = 0.0183$
  - $\beta = 0.98$
- The expected riskfree rate

$$\begin{aligned} E(r_{f,t+1}) &= -\log\beta + \gamma\mu_c - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2 \\ &\approx 0.1489 \end{aligned} \tag{51}$$

- ปัญหานี้ถูกเรียกว่า ``the expected riskfree rate puzzle''

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- สำหรับ ข้อมูลในเมืองไทยรายไตรมาสในช่วงปี 2000-2014
  - $\mu_c = 0.0096$
  - $\sigma_c = 0.0151$
  - $\mathrm{cov}(g_{c,t+1}, r_{m,t+1}) = 0.0002$
  - $\mathrm{var}(r_{m,t+1}) = 0.0146$
  - $E(r_m - r_f) = 0.0201$
  - $E(r_f) = 0.0048$
  - $\beta = 0.98$

  we can find $\gamma \approx 143$
- The expected riskfree rate

$$\begin{aligned} E(r_{f,t+1}) &= -\log\beta + \gamma\mu_c - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2 \\ &\approx -0.9281 \end{aligned} \tag{52}$$

- ดังนั้น จากข้อมูลในประเทศไทย พบว่ามีปัญหา ``equity premium puzzle'' และ ``the expected riskfree rate puzzle''

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- สมมติให้ $G_{c,t} = \frac{C_{t+1}}{C_t}$ คือ two-states Markov chain คือ

$$G_{c,t+1} = \begin{pmatrix} G_{c,h} = \mu + \sigma \\ G_{c,l} = \mu - \sigma \end{pmatrix}, M_{t+1} = \begin{pmatrix} M_h \\ M_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta G_{c,h} \\ \beta G_{c,l} \end{pmatrix} \quad (53)$$

แบบจำลองนี้ มี 2 state คือ สูง (h), ต่ำ(l)

- the transitions of a Markov chain คือ ความน่าจะเป็นที่ state i ไป state j ($\pi_{i,j}$)

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_{h,h} & \pi_{h,l} \\ \pi_{l,h} & \pi_{l,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\rho}{2} & \frac{1-\rho}{2} \\ \frac{1-\rho}{2} & \frac{1+\rho}{2} \end{pmatrix} \quad (54)$$

เมื่อ$\rho$ คือ autocorrelation ของ $G_{c,t}$

- The steady – state probability ของ 2 state คือ

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi_h \\ \Pi_l \end{pmatrix}, \quad (55)$$

เมื่อ $\Pi_h + \Pi_l = 1$ และ

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\Pi} \quad (56)$$

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- งานของ Mehra and Prescott (1985) สมมติให้ return on financial market สอดคล้องกับแบบจำลองต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
R_{m,t+1} &= R_{c,t+1} && (57)\\
&= \frac{Z_{t+1}+1}{Z_t} G_{c,t+1} && (58)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $Z_t = \frac{P_t}{C_t}$ คือ price-consumption ratio.

$$
Z = \begin{pmatrix} Z_h \\ Z_l \end{pmatrix} = [I - \beta\Gamma]^{-1}\beta\Gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{59}
$$

เมื่อ

$$
\Gamma = \begin{pmatrix} \pi_{h,h} G_{c,h}^{1-\gamma} & \pi_{h,l} G_{c,l}^{1-\gamma} \\ \pi_{l,h} G_{c,h}^{1-\gamma} & \pi_{l,l} G_{c,l}^{1-\gamma} \end{pmatrix} \tag{60}
$$

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- The expected return on financial market

$$E(R_m) = \Pi_h * R_{m,h} + \Pi_l * R_{m,l} \tag{61}$$

เมื่อ

$$R_{m,h} = \pi_{h,h}(\frac{Z_h + 1}{Z_h} G_{c,h}) + \pi_{h,l}(\frac{Z_l + 1}{Z_h} G_{c,l}) \tag{62}$$

$$R_{m,l} = \pi_{l,h}(\frac{Z_h + 1}{Z_l} G_{c,h}) + \pi_{l,l}(\frac{Z_l + 1}{Z_l} G_{c,l}) \tag{63}$$

# The equity premium (pricing equation)

## Equity Premium Puzzle (Mehra and Prescott 1985)

- The equity premium

$$E(r_m - r_f) = E(R_m) - E(R_f) \tag{64}$$

- The expected risk-free return

$$E(R_f) = \Pi_h R_{f,h} + \Pi_l R_{f,l} \tag{65}$$

เมื่อ

$$R_{f,h} = [(\pi_{h,h}\beta(G_{c,h})^{-\gamma} + \pi_{h,l}\beta(G_{c,l})^{-\gamma}]^{-1} \tag{66}$$

$$R_{f,l} = [\pi_{l,h}\beta(G_{c,h})^{-\gamma} + \pi_{l,l}\beta(G_{c,l})^{-\gamma}]^{-1} \tag{67}$$

- สำหรับ ข้อมูลในเมืองไทยรายไตรมาสในช่วงปี 2000-2014
  - $\mu = 1.0098$
  - $\sigma = 0.0152$
  - $\rho = -0.1892$
  - $\mathrm{E}(\mathrm{r_m} - \mathrm{r_f}) = 0.0279$
  - $\mathrm{E}(\mathrm{R_f}) = 1.0048$
  - $\beta = 0.98$

  we can find $\gamma \approx 25$
- The expected riskfree rate

$$\mathrm{E}(\mathrm{R_f}) = \Pi_h \mathrm{R}_{f,h} + \Pi_l \mathrm{R}_{f,l} \quad \approx \quad 1.2182 \tag{68}$$

- ดังนั้น จากข้อมูลในประเทศไทย พบว่ามีปัญหา ``equity premium puzzle'' และ ``the expected riskfree rate puzzle''