ความน่าจะเป็นพื้นฐาน (Basic Probability)

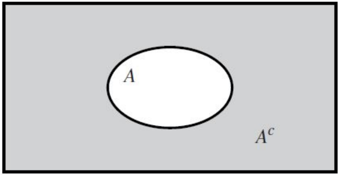
รศ.ดร. วีระชาติ กิเลนทอง
มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

Main Issues

- Set Theory
- Basic Probability

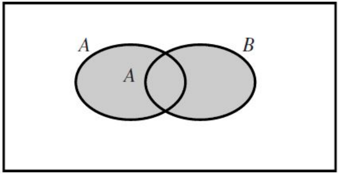
ทฤษฎีเซ็ตที่จำเป็นต่อทฤษฎีความน่าจะเป็นพื้นฐาน: นิยามพื้นฐาน

- การศึกษาเรื่องความน่าจะเป็น ต้องอาศัย ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีเซ็ต
- เอกภพสัมพัทธ์ (universe) S คือ เซ็ตที่มีสมาชิก "**ทุกตัว**"
- เซ็ตว่าง (empty set) $\emptyset$ คือเซ็ตที่ "**ไม่มี**" สมาชิกอยู่เลย
- เซ็ต A เป็นสับเซ็ตของเซ็ต B ที่แทนด้วย $A \subset B$ หมายความว่า สมาชิกทุกตัวที่อยู่ในเซ็ต A ต้องเป็นสมาชิกที่อยู่ในเซ็ต B ด้วย
- ส่วนเติมเต็ม (complement) ของเซ็ต A คือ เซ็ตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกทุกตัวของเอกภพสัมพัทธ์ (universe) S "**ที่ไม่เป็นสมาชิก**" ของ A โดยเรามักแทนส่วนเติมเต็มของเซ็ต A ด้วย A^c



ทฤษฎีเซ็ตที่จำเป็นต่อทฤษฎีความน่าจะเป็นพื้นฐาน: Union

- ยูเนียน (union) ของเซ็ต A และ B ซึ่งแทนด้วย $A \cup B$ ประกอบไปด้วยสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใน A **หรือ** B



สมบัติที่จำเป็น

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup A = A$
- $AUA^c = S$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup S = S$
- ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$

ทฤษฎีเซ็ตที่จำเป็นต่อทฤษฎีความน่าจะเป็นพื้นฐาน: Union

หลักการยูเนียนสามารถใช้ได้กับกรณีที่มีเซ็ตมากกว่าสองเซ็ต

- ความสัมพันธ์ระหว่าง 3 เหตุการณ์ A, B และ C ใดๆ จะต้องสอดคล้องกับคุณสมบัติการเชื่อมโยงของยูเนียน (associative property of union) ต่อไปนี้

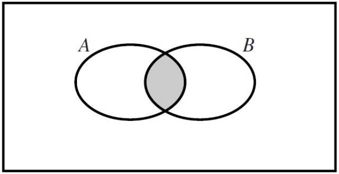
$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- กรณีที่มีเซ็ตทั้งหมด n เซ็ต ประกอบไปด้วย $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เราสามารถเขียนยูเนียนของ n เหล่านี้ได้เป็น

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

ทฤษฎีเซ็ตที่จำเป็นต่อทฤษฎีความน่าจะเป็นพื้นฐาน: Intersection

- ส่วนร่วม (intersection) ของเซ็ต A และ B ซึ่งแทนด้วย $A \cap B$ ประกอบไปด้วยสมาชิกทุกตัวที่อยู่ในทั้ง “A **และ** B”



สมบัติที่จำเป็น

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap A = A$
- $A \cap A^c = \emptyset$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap S = A$
- ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$

ทฤษฎีเซ็ตที่จำเป็นต่อทฤษฎีความน่าจะเป็นพื้นฐาน: Intersection

ในทำนองเดียวกับการยูเนียน ส่วนร่วม (intersection) สามารถใช้ได้กับกรณีที่เซ็ตมากกว่าสองเซ็ต

- ความสัมพันธ์ระหว่าง 3 เหตุการณ์ A, B และ C ใดๆ จะต้องสอดคล้องกับคุณสมบัติการเชื่อมโยงของส่วนร่วม (associative property of intersection) ต่อไปนี้

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- กรณีที่มีเซ็ตทั้งหมด n เซ็ต ประกอบไปด้วย $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เราสามารถเขียนส่วนร่วมของ n เหล่านี้ได้เป็น

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

ทฤษฎีเซ็ตที่จำเป็นต่อทฤษฎีความน่าจะเป็นพื้นฐาน: กฎพื้นฐาน

นิยามที่สำคัญ

- De Morgan's Laws

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \text{ และ } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

- คุณสมบัติการกระจาย (distributive properties)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \text{ และ } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- กำหนดให้ A, B, และ C เป็นเซ็ต ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset A$ แล้ว $A = B$ นอกจากนี้ ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

การไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) หรือ การไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive)

Definition

เซ็ต A และ B ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) หรือไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive) ถ้า $A \cap B = \emptyset$

Example

พิจารณาการโยนลูกเต๋า 6 หน้า ปริภูมิตัวอย่างในกรณีนี้คือ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เหตุการณ์ที่ผลลัพธ์เป็นเลขคี่คือ $A_1 = \{1, 3, 5\}$ ส่วนเหตุการณ์ที่ผลลัพธ์เป็นเลขคู่คือ $A_2 = \{2, 4, 6\}$ ชัดเจนว่า $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า เหตุการณ์ A_1 และ A_2 ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) ในทางตรงกันข้าม เหตุการณ์ที่ผลลัพธ์น้อยกว่า 3 คือ $A_3 = \{1, 2\}$ ดังนั้น เหตุการณ์ A_2 และ A_3 มีส่วนร่วมต่อกัน เพราะ $A_2 \cap A_3 = \{2\} \neq \emptyset$

ความน่าจะเป็น (probability)

- **ความน่าจะเป็น (probability)** เป็นพื้นฐานสำคัญเพื่อบอก "**โอกาส**" ที่แต่ละสถานการณ์หรือเหตุการณ์จะเกิดขึ้นจาก "การทดลองอันใดอันหนึ่ง ไม่ว่าจะเป็นกระบวนการทดลองจริง (real experiment) หรือการทดลองทางความคิด (thought experiment)"
- ตัวอย่าง
  - ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์ของการโยนเหรียญเป็นหัว (หรือก้อย) เท่ากับ $\frac{1}{2}$ หมายความว่า โอกาส (likelihood) ที่ผลลัพธ์ของการโยนเหรียญจะเป็นหัวหรือก้อยน่าจะพอๆ กัน
  - ความน่าจะเป็นที่เด็กไทยจะเป็นโรคออทิสติก (autistic disorder) มีค่าประมาณ 0.006 เพราะเราพบในข้อมูลว่าร้อยละ 0.6 ของเด็กไทยป่วยเป็นโรคดังกล่าว เป็นต้น

นิยามของการทดลอง (experiment)

Definition (การทดลอง)

การทดลอง (experiment) คือกระบวนการ (process) ที่สามารถระบุได้ว่าผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (possible outcomes) ประกอบด้วยอะไรบ้าง เราเรียกการทดลองที่ไม่สามารถกำหนดผลลัพธ์ได้อย่างแน่นอนล่วงหน้าเพียงอันเดียวว่า การทดลองสุ่ม (random experiment)

- ตัวอย่างการทดลองสุ่ม: การโยนเหรียญ 1 ครั้ง เราทราบว่าผลลัพธ์อาจเป็นเหรียญหงายหัวหรือก้อย แต่ก่อนที่จะโยนเหรียญลงไป เรา "**ไม่สามารถ**" บอกได้แน่นอนว่า เหรียญจะหงายหัวหรือก้อย

ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) และ เหตุการณ์ (event)

Definition (ปริภูมิตัวอย่าง)

ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) คือเซ็ตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (possible outcomes) ทั้งหมดของการทดลองอันใดอันหนึ่ง

Definition (เหตุการณ์)

เหตุการณ์ (event) หมายถึงเซ็ตซึ่งระบุไว้ชัดเจน (well-defined set) ของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (possible outcomes)

ตัวอย่างของเหตุการณ์และปริภูมิตัวอย่าง

- การทดลองสุ่มทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง
  - ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) คือ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด นั่นคือ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - ตัวอย่างเหตุการณ์ (event)
    - เหตุการณ์ที่ลูกเต๋า "**ออกหน้าเป็นเลขคี่**" คือ $\{1, 3, 5\}$
    - เหตุการณ์ที่ลูกเต๋า "**ออกหน้าเป็นเลขคู่**" คือ $\{2, 4, 6\}$
    - เหตุการณ์ที่ลูกเต๋า "**ออกหน้าเป็นเลขคู่ 7**" นั่นคือ $\emptyset$

ข้อควรระวังทางเทคนิค

- ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) “**ไม่จำเป็น**” ต้องมีคุณสมบัติเป็นเหตุการณ์ (event) ซึ่งจะเกิดขึ้นได้ในกรณีที่ปริภูมิตัวอย่างเป็น “**เซ็ตแบบต่อเนื่อง**”
- ผู้อ่านที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือที่เกี่ยวกับมาตรวัดความน่าจะเป็น (Probability Measure) เช่น Billingley (2008)

สัจพจน์ของความน่าจะเป็น

Axiom (คุณสมบัติการเป็นบวกของความน่าจะเป็น)

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ใดๆ จะต้องไม่น้อยกว่าศูนย์ นั่นคือ

$$Pr\left(A\right) \geq 0 \tag{1}$$

Axiom (คุณสมบัติความแน่นอนของปริภูมิตัวอย่าง)

ความน่าจะเป็นของปริภูมิตัวอย่าง S ซึ่งเกิดขึ้นอย่างแน่นอนจะต้องมีค่าเท่ากับหนึ่ง นั่นคือ

$$Pr\left(S\right) = 1 \tag{2}$$

Axiom (คุณสมบัติการบวกกันของความน่าจะเป็น)

ความน่าจะเป็นของยูเนียนของอนุกรมอนันต์ของเหตุการณ์ที่ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint events) มีค่าเท่ากับผลบวกของความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์ นั่นคือ

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\left(A_i\right) \tag{3}$$

นิยามของความน่าจะเป็น

Definition (ความน่าจะเป็น (probability))

ความน่าจะเป็น (probability) หรือมาตรวัดความน่าจะเป็น (probability measure) หมายถึง ฟังก์ชัน (function) $Pr(A)$ ที่ทำหน้าที่แปลงเหตุการณ์ $A \subset S$ ใดๆ ให้อยู่ในรูปของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสัจพจน์ 1-3

- สำหรับการทดลองอันใดอันหนึ่ง เราสามารถนิยามหรือสร้างความน่าจะเป็น (probability) ที่สอดคล้องกับสัจพจน์ของความน่าจะเป็นทั้งสามข้อได้มากกว่าหนึ่งแบบ กล่าวคือ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นไม่มีความเป็นหนึ่งเดียว (not unique)
- ตัวอย่าง: การทดลองโยนลูกเต๋า 6 หน้า ซึ่งมีปริภูมิตัวอย่างเป็น $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - ฟังก์ชันที่กำหนดให้ความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มีค่าเท่ากัน นั่นคือ ความน่าจะเป็นของผลการโยนที่ได้ค่า k มีค่าเท่ากับ $p_k = \frac{1}{6}$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - ถ้ากำหนดให้ความน่าจะเป็นของผลการโยนที่ได้ค่า k มีค่าเท่ากับ $\tilde{p}_k = \frac{1}{18}$ สำหรับ $k = 1, 3, 5$ และ ความน่าจะเป็นของผลการโยนที่ได้ค่า k มีค่าเท่ากับ $\tilde{p}_k = \frac{5}{18}$ สำหรับ $k = 2, 4, 6$ ฟังก์ชันอันนี้ก็สอดคล้องกับสัจพจน์ (ลองตรวจสอบดู)

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น: เซ็ตว่าง

Theorem

$Pr\left(\emptyset\right) = 0$

Proof.

พิจารณาอนุกรมเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots$ โดยที่ $A_i = \emptyset$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots$ ซึ่งไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) เพราะ $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับทุก $i \neq j$ และ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ ดังนั้น เราจึงสามารถประยุกต์ใช้สัจพจน์ "การบวกกันของความน่าจะเป็น" เพื่อแสดงว่า

$$Pr\left(\emptyset\right) = Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\left(A_i\right)$$

มีทางเดียวที่สมการนี้จะเป็นจริงได้คือ $Pr\left(\emptyset\right) = 0$ □

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น: Finite Disjoint

Theorem

สำหรับอนุกรมจำกัดของเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ที่ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) ใดๆ*

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Pr\left(A_i\right) \tag{4}$$

Proof.

พิจารณาอนุกรมเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots$ โดยที่ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) และ $A_i = \emptyset$ เมื่อ $i > n$ ดังนั้น อนุกรมเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots$ ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) และ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ดังนั้น เราจึงสามารถประยุกต์ใช้สัจพจน์ที่ "การบวกกันของความน่าจะเป็น" เพื่อแสดงว่า

$$\begin{aligned} Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\left(A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Pr\left(A_i\right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} Pr\left(A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Pr\left(A_i\right) + 0 = \sum_{i=1}^{n} Pr\left(A_i\right) \end{aligned}$$

$\square$

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น: Complement

Theorem

สำหรับเหตุการณ์ A ใดๆ

$$Pr\left(A^c\right) = 1 - Pr\left(A\right) \tag{5}$$

Proof.

เนื่องจาก A และ A^c ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) และ $A \cup A^c = S$ ดังนั้น

$$Pr\left(A\right) + Pr\left(A^c\right) = Pr\left(S\right) = 1$$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า $Pr\left(A^c\right) = 1 - Pr\left(A\right)$ □

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น: Subset

Theorem

ถ้า $A \subset B$ แล้ว $Pr(A) \leq Pr(B)$

Proof.

เนื่องจาก A และ $(B \cap A^c)$ ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) และ $B = A \cup (B \cap A^c)$ ดังนั้น

$$Pr(B) = Pr(A) + Pr(B \cap A^c)$$

เนื่องจาก $Pr(B \cap A^c) \geq 0$ เราจึงสามารถสรุปได้ว่า $Pr(A) \leq Pr(B)$ $\square$

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น: ค่าที่เป็นไปได้ของความน่าจะเป็น

Theorem

สำหรับเหตุการณ์ A ใดๆ $0 \leq Pr(A) \leq 1$

Proof.

ส่วนแรกเป็นผลมาจากสัจพจน์ "การเป็นบวกของความน่าจะเป็น" ที่กำหนดให้ $0 \leq Pr(A)$ ส่วนที่สองเป็นผลมาจากทฤษฎีบทที่แล้ว เนื่องจาก $A \subset S$ ดังนั้น $Pr(A) \leq Pr(S) = 1$ โดยที่สมการสุดท้ายเป็นผลมาจากสัจพจน์ "ความแน่นอนของปริภูมิตัวอย่าง" $\square$

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น: Intersection with Complement

Theorem

สำหรับเหตุการณ์ A และ B ใดๆ

$$Pr\left(A \cap B^c\right) = Pr\left(A\right) - Pr\left(A \cap B\right)$$

Proof.

จากทฤษฎีบทก่อนหน้านี้ ซึ่งระบุว่า $A = (A \cap B) \cup \left(A \cap B^c\right)$ และ $(A \cap B)$ และ $\left(A \cap B^c\right)$ ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทก่อนหน้านี้ เพื่อแสดงว่า

$$Pr\left(A\right) = Pr\left(A \cap B\right) + Pr\left(A \cap B^c\right)$$

$\square$

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น: Union

Theorem

สำหรับเหตุการณ์ A และ B ใดๆ

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B) \tag{6}$$

Proof.

จากทฤษฎีบทก่อนหน้านี้ ซึ่งระบุว่า $A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$ และ B และ $(A \cap B^c)$ ไม่มีส่วนร่วมต่อกัน (disjoint) เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทก่อนหน้านี้ เพื่อแสดงว่า

$$Pr(A \cup B) = Pr(B) + Pr(A \cap B^c)$$

เมื่อแทนค่า $Pr(A \cap B^c) = Pr(A) - Pr(A \cap B)$ จากทฤษฎีบทก่อนหน้านี้ ลงไปจะได้ว่า

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$$

□

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น: Finite Unions

Theorem

สำหรับอนุกรมจำกัดของเหตุการณ์ $A_1, \ldots, A_n$

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i) - \sum_{i<j} Pr(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} Pr(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \cdots + (-1)^{n+1} Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \tag{7}$$

Proof.

- ทฤษฎีบทนี้ใช้วิธีการพิสูจน์แบบอุปนัย (induction) โดยเริ่มจากทฤษฎีบทก่อนหน้านี้ ซึ่งระบุว่าทฤษฎีบทที่ต้องการพิสูจน์นี้เป็นจริงในกรณีที่ $n = 2$ ส่วนกรณีที่ $n = 1$ นั้นสามารถเข้าใจได้ไม่ยาก
- ส่วนที่เหลือคือการพิสูจน์ว่า ถ้าทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ n ใดๆ แล้วจะต้องเป็นจริงสำหรับ $m = n + 1$ เสมอ

$\square$

Proof of Finite Unions (Con't)

Proof.

- สมมุติให้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ $n \geq 2$ และกำหนดให้ $A_1, \ldots, A_{n+1}$ เป็นอนุกรมของเหตุการณ์ และ $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และ $B = A_{n+1}$ เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีก่อนหน้าได้ว่า

$$\begin{aligned} Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= Pr\left(\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \cup A_{n+1}\right) \\ &= Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + Pr\left(A_{n+1}\right) - Pr\left(\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \cap A_{n+1}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

- หลังจากนั้น เราสามารถประยุกต์ใช้คุณสมบัติการกระจายเพื่อแสดงว่า

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \cap A_{n+1}\right)$$

□

Proof of Finite Unions (Con't)

Proof.

ซึ่งมีทั้งหมด n พจน์ ดังนั้น เราจึงสามารถประยุกต์ใช้สมการที่ (7) สำหรับ n พจน์ เพื่อแปลงพจน์ที่หนึ่งในสมการที่ (8) ให้เป็น

$$
\begin{aligned}
Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} Pr\left(A_i\right) - \sum_{i<j} Pr\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i<j<k} Pr\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \\
&\quad - \sum_{i<j<k<l} Pr\left(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l\right) + \cdots + (-1)^{n+1} Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)
\end{aligned}
$$

และแปลงพจน์ที่สามในสมการที่ (8) ให้เป็น

$$
\begin{aligned}
-Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) &= -\sum_{i=1}^{n} Pr\left(A_i \cap A_{n+1}\right) + \sum_{i<j} Pr\left(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}\right) \quad -\sum_{i<} \\
&\quad + \sum_{i<j<k<l} Pr\left(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_{n+1}\right) + \cdots + (-1)^{n+2} Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)
\end{aligned}
$$

□

Proof of Finite Unions (Con't)

Proof.

ขั้นตอนสุดท้ายคือการแทนผลที่ได้เข้าไปในสมการที่ (8) เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} Pr\left(A_i\right) - \sum_{i<j} Pr\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i<j<k} Pr\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \\
- \sum_{i<j<k<l} Pr\left(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l\right) + \cdots + (-1)^{n+2} Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่า หากทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ $n \geq 2$ แล้วจะต้องเป็นจริงสำหรับ $m = n + 1$ $\square$

เหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็นเท่ากับศูนย์ไม่ได้หมายความว่าเป็นไปไม่ได้

- เรามักจะบอกว่าเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้ (impossible events) มีความน่าจะเป็นเท่ากับศูนย์ แต่ในทางกลับกัน เหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็นเท่ากับศูนย์นั้นอาจจะเกิดขึ้นได้

<u>ตัวอย่าง</u> เหตุการณ์ที่ปริมาณน้ำฝนที่ตกในวันพรุ่งนี้มีค่าระหว่าง $x - \epsilon$ และ $x + \epsilon$ มิลลิเมตร โดยที่ x และ ϵ เป็นค่าจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์

- ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้เมื่อเราพิจารณาลิมิตที่ ϵ ลู่เข้าสู่ศูนย์จะเท่ากับศูนย์โดยอัตโนมัติ
- แต่ไม่ได้หมายความว่า เหตุการณ์นี้เกิดขึ้นไม่ได้ เพราะถ้าเป็นเช่นนั้นย่อมหมายความว่า จะไม่สามารถมีฝนตกในปริมาณใดๆ ได้เลย
- ตัวอย่างนี้คือคุณสมบัติพื้นฐานของการอินทิเกรต (integration) นั่นเอง