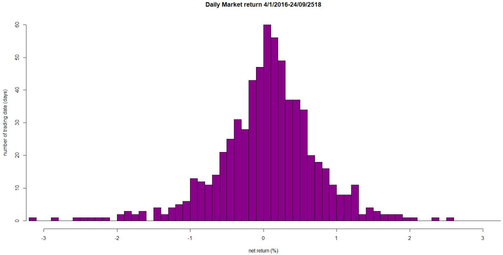
การแจกแจงปกติ (Normal Distributions)

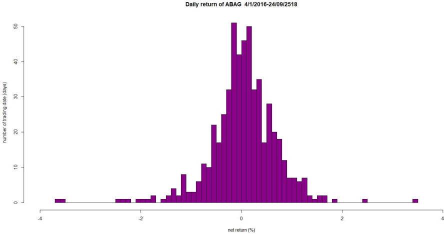
รศ.ดร. วีระชาติ กิเลนทอง
มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

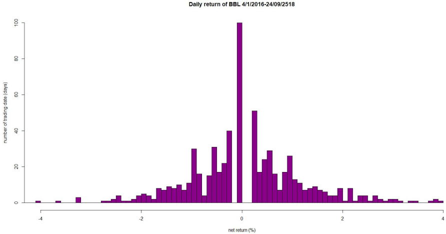
การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

- การแจกแจงปกติ (normal distribution) เป็นหนึ่งในรูปแบบของการแจกแจงที่ได้รับความนิยมสูงสุด ซึ่งมีเหตุผลหลักสามประการดังนี้
  1. **คุณสมบัติทางสถิติที่ทำให้สะดวกต่อการวิเคราะห์**
     - ★ ผลรวมของตัวแปรสุ่มที่**แต่ละตัวมีการแจกแจงปกติ**จะมีการแจกแจงปกติ
     - ★ การแจกแจงปกติสามารถอธิบายได้ด้วย **พารามิเตอร์เพียงสองตัว** คือ ค่าความคาดหมาย (mean) μ และค่าความแปรปรวน (variance) σ^2
  2. **การแจกแจงของตัวประมาณค่า (estimator) หรือตัวทำนาย (predictor) ส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงปกติ** เมื่อจำนวนตัวอย่างมากขึ้นเรื่อยๆ จาก "ทฤษฎีบทลิมิตของค่ากลาง (Central Limit Theorem)" ซึ่งจะนำเสนอในบทถัดๆ ไป ได้ระบุว่าค่าเฉลี่ยของตัวอย่างจะลู่เข้าสู่ (converge) การแจกแจงปกติ (normal distribution)
  3. จากการสังเกตในธรรมชาติพบว่า **มีปรากฏการณ์จำนวนไม่น้อยที่นำไปสู่การแจกแจงที่มีลักษณะคล้ายกับการแจกแจงปกติ (normal distribution)**

รูปข้อมูลตัวอย่างของการแจกแจงปกติ (Normal Distribution)







การแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution Function)

- การแจกแจงปกติที่มีความพิเศษคือ "**การแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)**" ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) เท่ากับ

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{1}$$

- "**ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของตัวแปรสุ่ม** Z" ที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\psi_Z(t) = E\left[e^{tZ}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(z^2-2tz+t^2\right)}{2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tilde{z}^2}{2}} d\tilde{z} = e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

โดยที่ในขั้นตอนก่อนสุดท้ายใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร $\tilde{z} = z - t$

ค่าความคาดหมาย (mean) และค่าความแปรปรวน (variance) ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)

- ค่าความคาดหมาย (mean) และค่าความแปรปรวน (variance) หาได้จาก ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) จากทฤษฎีบทที่ก่อนหน้า

$$E\left[Z\right] = \frac{d}{dt}\psi_Z\left(t\right)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{\frac{t^2}{2}}\bigg|_{t=0} = te^{\frac{t^2}{2}}\bigg|_{t=0} = 0 \qquad (2)$$

$$Var\left[Z\right] = E\left[Z^2\right] = \frac{d^2}{dt^2}e^{\frac{t^2}{2}}\bigg|_{t=0} = \left[e^{\frac{t^2}{2}} + t^2e^{\frac{t^2}{2}}\right]\bigg|_{t=0} = 1 \qquad (3)$$

- **การแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)** คือ การแจกแจงแบบปกติที่มี “**ค่าความคาดหมายเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง**” ซึ่งมักเขียนแทนการแจกแจงแบบนี้ด้วย $N\left(0, 1\right)$

ฟังก์ชันเชิงเส้นของการแจกแจงปกติ (Normal Distribution Function)

- เราสามารถสร้างตัวแปรสุ่ม X ที่มีการการแจกแจงปกติ (normal distribution) ที่มีค่าความคาดหมาย (mean) เท่ากับ μ และค่าความแปรปรวน (variance) เท่ากับ σ^2 ได้จากตัวแปรสุ่ม Z โดยใช้ความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อไปนี้

$$X = \sigma Z + \mu \tag{4}$$

- ดังนั้น ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของตัวแปรสุ่ม X เท่ากับ

$$\psi_x(t) = e^{\mu t} e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \tag{5}$$

- ค่าความคาดหมาย (mean) และค่าความแปรปรวน (variance) คือ

$$E[X] = \frac{d}{dt}\psi_x(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\bigg|_{t=0} = \left(\mu + t\sigma^2\right)e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\bigg|_{t=0} = \mu$$

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - \mu^2 = \frac{d^2}{dt^2}e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\bigg|_{t=0} - \mu^2$$

$$= \left[\sigma^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + \left(\mu + t\sigma^2\right)^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right]\bigg|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

การแจกแจงปกติ (Normal Distribution Function)

- ตัวแปรสุ่ม $X = \sigma Z + \mu$ มีการการแจกแจงปกติ (normal distribution) ที่ค่าความคาดหมาย (mean) เท่ากับ μ และค่าความแปรปรวน (variance) เท่ากับ σ^2 ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) เท่ากับ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

  และสามารถเขียนแทนการแจกแจงแบบนี้ด้วย $N\left(\mu, \sigma^2\right)$

- หากทราบว่าตัวแปรสุ่ม X มีการการแจกแจงปกติ (normal distribution) ที่ค่าความคาดหมาย (mean) เท่ากับ μ และค่าความแปรปรวน (variance) เท่ากับ $\sigma^2 \neq 0$ แล้วก็จะทราบทันทีว่าตัวแปรสุ่ม $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)
- การแปลงค่ารูปแบบนี้คือการปรับคะแนนมาตรฐาน (standardized score) ซึ่งนิยมใช้ในการปรับค่าผลลัพธ์หรือผลการทดสอบให้อยู่ในรูปของตัวแปรที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ตัวอย่าง: การประยุกต์ใช้ในแบบจำลองทางการเงิน

Example

แบบจำลองทางการเงินมักสมมุติให้มูลค่าของหลักทรัพย์ ณ เวลา t เป็นไปตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$V(t) = V_0 e^{tr}$$

โดยที่ V_0 คือมูลค่าของหลักทรัพย์ ณ เวลาที่ $t = 0$ และ r คืออัตราผลตอบแทนสุทธิ (net return) ของหลักทรัพย์ดังกล่าว ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ (normal distribution) โดยที่ค่าคาดหมายมีค่าเท่ากับ μ และค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) ซึ่งในทางการเงินมักเรียกว่า ความผันผวน (volatility) มีค่าเท่ากับ σ ($r \sim N(\mu, \sigma^2)$)

- ค่าคาดหมาย (mean) ของมูลค่าของหลักทรัพย์ ณ เวลา t มีค่าเท่ากับ

$$E\left[V(t)\right] = E\left[V_0 e^{tr}\right] = V_0 E\left[e^{tr}\right]$$

- สังเกตได้ว่า $E\left[e^{tr}\right]$ คือฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ (ดูสมการที่ 5 ประกอบ) ดังนั้น ค่าคาดหมาย (mean) ของมูลค่าของหลักทรัพย์ ณ เวลา t มีค่าเท่ากับ

$$E\left[V(t)\right] = V_0 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

ทฤษฎี: ความสมมาตรของการแจกแจงปกติ

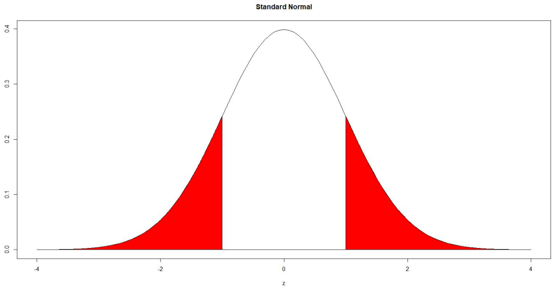
Theorem (ความสมมาตรของการแจกแจงปกติ)

สำหรับค่าจำนวนจริง z ใดๆ

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \tag{7}$$

และสำหรับ $0 < p < 1$

$$\Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p) \tag{8}$$



การพิสูจน์: ความสมมาตรของการแจกแจงปกติ

Proof.

- เริ่มจากความสัมพันธ์ที่ว่า

$$Pr\left(Z \leq -z\right) + Pr\left(Z > -z\right) = 1$$

- เนื่องจากการแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงที่สมมาตร (symmetric) ทำให้ $Pr\left(Z > -z\right) = Pr\left(Z \leq z\right)$ ดังนั้น

$$Pr\left(Z \leq -z\right) + Pr\left(Z \leq z\right) = 1 \Rightarrow \Phi\left(-z\right) = 1 - \Phi\left(z\right)$$

- สมการที่ 8 พิสูจน์ได้ด้วยการแทนค่า $z = \Phi^{-1}\left(p\right)$ และส่วนกลับของมัน $\Phi\left(z\right) = p$ ลงในด้านซ้ายและด้านขวาสมการที่ 7 ตามลำดับ

$$\Phi\left(-\Phi^{-1}\left(p\right)\right) = 1 - p \Rightarrow -\Phi^{-1}\left(p\right) = \Phi^{-1}\left(1 - p\right)$$

- สอดคล้องกับสมการที่ 8

□

ทฤษฎี: ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงปกติและการแจกแจงปกติมาตรฐาน

Theorem

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีแจกแจงปกติ (normal distribution) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) μ และค่าความแปรปรวน (variance) σ^2 และกำหนดให้ F แทนฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม (C.D.F.) ของ X ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) โดยที่ สำหรับค่าจำนวนจริง x ใดๆ

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{9}$$

และสำหรับค่าจำนวนจริง $0 < p < 1$ ใดๆ

$$F^{-1}(p) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p) \tag{10}$$

ตัวอย่าง: การหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติ

Example

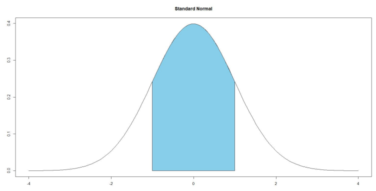
สมมุติให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยด้วยค่าคาดหมาย (mean) $\mu = 10$ และค่าความแปรปรวน (variance) $\sigma^2 = 5$ คำถามก็คือ ความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าอยู่ในช่วง $5 < X < 15$ มีค่าเท่าใด?

เริ่มจากการแปลงตัวแปรสุ่มให้เป็นแบบปกติมาตรฐานด้วยฟังก์ชัน $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$Pr\,(5 < X < 15) = Pr\left(\frac{5-10}{5} < \frac{X-10}{5} < \frac{15-10}{5}\right) = Pr\,(-1 < Z < 1)$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปของ Φ ได้เป็น

$$Pr\,(-1 < Z < 1) = Pr\,(|Z| < 1) = \Phi\,(1) - \Phi\,(-1) \approx 0.6826$$



ทฤษฎี: ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear) ของตัวแปรสุ่มปกติจะยังมีการแจกแจงปกติ

Theorem (ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear) ของตัวแปรสุ่มปกติจะยังมีการแจกแจงปกติ)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) μ และค่าความแปรปรวน (variance) σ^2 และ $Y = aX + b$ สำหรับค่าคงที่ a และ b โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว Y จะมีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) $a\mu + b$ และค่าความแปรปรวน (variance) $a^2\sigma^2$

Proof.

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของตัวแปรสุ่ม X เท่ากับ

$$\psi_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของตัวแปรสุ่ม $Y = aX + b$ เท่ากับ

$$\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at) = e^{bt}e^{\mu a t + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 t^2} = e^{(a\mu + b)t + \frac{1}{2}(a^2\sigma^2)t^2}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ตรงกับรูปแบบของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของการแจกแจงปกติ ที่มี **ค่าคาดหมาย (mean)** $a\mu + b$ และ **ค่าความแปรปรวน (variance)** $a^2\sigma^2$ □

ทฤษฎี: การแจกแจงปกติ (normally distributed) ของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

Theorem (ตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน)

ถ้าตัวแปรสุ่ม $X_1, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน และ X_i มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) μ_i และค่าความแปรปรวน (variance) σ_i^2 สำหรับ $i = 1, \ldots, n$ แล้ว $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b$ และค่าความแปรปรวน (variance) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$

พิสูจน์: การแจกแจงปกติ (normally distributed) ของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

Proof.

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของ X_i เท่ากับ

$$\psi_i(t) = e^{\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2}$$

เนื่องจากตัวแปรสุ่มเหล่านี้เป็นอิสระต่อกัน ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของ Y เท่ากับ

$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{bt}\psi_i(a_i t) = \prod_{i=1}^{n} e^{bt} e^{\mu_i a_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 a_i^2 t^2} = e^{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i + b\right)t + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)t^2}$$

ซึ่งบ่งบอกว่า Y มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) $\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i + b$ และค่าความแปรปรวน (variance) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$ $\square$

นิยาม: ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างสุ่ม (random sample)

Definition

กำหนดให้ $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม ค่าคาดหมายของตัวอย่าง (sample mean) นิยามได้เป็น

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \tag{11}$$

- หากพิจารณาจากข้อมูล (observed data) n ตัวอย่าง ค่าเฉลี่ย (average) นั้นหมายถึง $\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ โดยที่ x_i คือค่าที่เกิดขึ้นจริง (realized value) ของตัวแปรสุ่ม X_i หรือค่าตัวแปรของตัวอย่าง $1, \ldots, n$
- ค่าเฉลี่ย (average) $\bar{x}_n$ คือสำเนาจากตัวอย่าง (sample counterpart) ของค่าคาดหมายของตัวอย่าง (sample mean) $\overline{X}_n$ สิ่งที่แตกต่างกันก็คือ ค่าเฉลี่ย (average) $\bar{x}_n$ เป็นจำนวนจริงค่าหนึ่ง **ส่วนค่าคาดหมายของตัวอย่าง (sample mean) $\overline{X}_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม**

ทฤษฎี: ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างสุ่ม (random sample) ที่สุ่มมาจากการแจกแจงปกติ (normal distribution) จะมีการแจกแจงปกติ

Theorem

สมมุติให้ $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่นำไปสู่ตัวอย่างสุ่ม (random sample) ขนาด n และแต่ละตัวเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) μ และค่าความแปรปรวน (variance) σ^2 ดังนั้น ค่าคาดหมายของตัวอย่าง (sample mean) $\overline{X}_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) μ และค่าความแปรปรวน (variance) $\frac{\sigma^2}{n}$ นั่นคือ

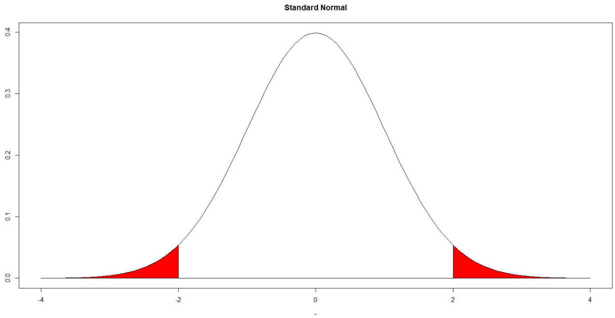
$$\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{12}$$

Proof.

ทฤษฎีบทนี้เป็นผลมาจากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทที่แล้วโดยกำหนดให้ $a_i = \frac{1}{n}$ และ $b = 0$ ซึ่งช่วยให้สรุปได้ว่า $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วย **ค่าคาดหมาย (mean)** $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\mu = \mu$ และ **ค่าความแปรปรวน (variance)** $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ □

ความน่าจะเป็นและ σ

- การประยุกต์ใช้การแจกแจงปกติ (และการแจกแจงที) ในการทดสอบสมมุติฐานทำได้โดยง่าย
  - การใช้งานในลักษณะของเกณฑ์มาตรฐาน (benchmark) คือ ที่สองเท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2σ จะหมายถึงประมาณร้อยละ 95
  - สามเท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3σ จะหมายถึงมากกว่าร้อยละ 99
  - เกณฑ์มาตรฐานแบบนี้ช่วยให้นักวิเคราะห์สามารถอ่านผลการประมาณค่าได้อย่างรวดเร็วโดยไม่ต้องพึ่งตารางสถิติ



- การแจกแจงอันหนึ่งที่เชื่อมโยงกับการแจกแจงปกติคือ การแจกแจงปกติด้วยล็อก (lognormal distribution) ซึ่งหมายถึงการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่ล็อกการิธึมของตัวแปรนั้นมีการแจกแจงปกติ (normal distribution)

นิยาม: การแจกแจงปกติด้วยล็อก (lognormal distribution)

Definition

ถ้า $\ln X$ มีการแจกแจงปกติ (normal distribution) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) μ และค่าความแปรปรวน (variance) σ^2 แล้ว ตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงปกติด้วยล็อก (lognormal distribution) ที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2

- ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงปกติด้วยล็อก (lognormal distribution) สำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ^2 เท่ากับ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{สำหรับ } x > 0, \\ 0, & \text{สำหรับกรณีอื่น} \end{cases} \tag{13}$$

- ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม (C.D.F.) เท่ากับ

$$F(x) = Pr(X \leq x) = Pr\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \tag{14}$$

ค่าคาดหมาย (mean) และค่าความแปรปรวน (variance)ของการแจกแจงปกติด้วยล็อก (lognormal distribution)

- การหาค่าคาดหมาย (mean) และค่าความแปรปรวน (variance) นั้นมีเทคนิคหนึ่งที่ช่วยให้คำนวณหาค่าได้ง่ายคือ การใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของตัวแปรที่มีการแจกแจงปกติ ซึ่งในที่นี้หมายถึง $Y = \ln X$

$$\psi_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

- สมการสุดท้ายเป็นผลมาจากการที่ $Y = \ln X$ มีการแจกแจงปกติ (normal distribution) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) μ และค่าความแปรปรวน (variance) σ^2 ในขณะเดียวกัน เราสามารถเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ในรูปของ X ได้เป็น

$$\psi_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] = E\left[e^{t\ln X}\right] = E\left[X^t\right]$$

- ค่าคาดหมายของ X เท่ากับ

$$E[X] = \psi_Y(1) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

- ค่าความแปรปรวนของ X เท่ากับ

$$\begin{aligned} Var[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 = \psi_Y(2) - \psi_Y(1)^2 \\ &= e^{2\mu + 2\sigma^2} - \left(e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}\right)^2 = e^{2\mu + \sigma^2}\left[e^{\sigma^2} - 1\right] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง: การคำนวณราคาอนุพันธ์เพื่อซื้อ (call options)

Example

สมมุติให้ราคาหลักทรัพย์ ณ เวลา t, S_t, มีการแจกแจงปกติด้วยล็อก (lognormal distribution) นั่นคือ $S_t = S_0 e^{Z_t}$ โดยที่ Z_t มีการแจกแจงปกติ (normal distribution) ที่มีค่าคาดหมาย (mean) μt และค่าความแปรปรวน (variance) $\sigma^2 t$

- ความสะดวกในการคำนวณ สามารถเขียน Z_t ในรูปของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) Z ได้เป็น

$$Z_t = \mu t + \sigma \sqrt{t} Z$$

- สามารถเขียนราคาหลักทรัพย์ในรูปการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) Z ได้เป็น

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma \sqrt{t} Z}$$

- พิจารณาอนุพันธ์เพื่อซื้อ (call options) ซึ่งหมายถึงอนุพันธ์ที่ให้สิทธิแก่ผู้ซื้อในการซื้อหลักทรัพย์ที่ราคาอ้างอิง (strike price) K ณ เวลาที่กำหนด T แต่ไม่จำเป็นต้องใช้สิทธิ์นั้นถ้าไม่ต้องการ ดังนั้นมูลค่า (value) ของอนุพันธ์เพื่อซื้อ (call option) ณ เวลาที่กำหนด T มีค่าเท่ากับ

$$V(S) = \max\{S - K, 0\} = \begin{cases} S - K, & \text{ถ้า } S > K \\ 0, & \text{ถ้าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

วิธีทำ: การคำนวณราคาอนุพันธ์เพื่อซื้อ (call options)

Example

- การกำหนดราคาอนุพันธ์ (option pricing) ในที่นี้จะประยุกต์ใช้หลักการเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk neutrality)
- กำหนดว่า ค่าคาดหมายของมูลค่าของหลักทรัพย์ควรจะมีค่าเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้จากการฝากเงินแบบไม่มีความเสี่ยงที่อัตราดอกเบี้ย r นั่นคือ $e^{rt}S_0 = E\left[S_t\right]$ ซึ่งมีผลทำให้สามารถสรุปได้ว่า

$$e^{rt}S_0 = E\left[S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}Z}\right] \Rightarrow e^{rt} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t} \Rightarrow \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

- หลักการเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk neutrality) ยังระบุว่าราคาอนุพันธ์เพื่อซื้อ, $C\left(K, T\right)$, ควรจะมีค่าเท่ากับค่าคาดหมายของมูลค่าของอนุพันธ์ที่ปรับส่วนลด (discount) ด้วยอัตราดอกเบี้ย r นั่นคือ

$$C\left(K, T\right) = e^{-rT}E\left[V\left(S_T\right)\right] = e^{-rT}E\left[\max\left\{S_T - K, 0\right\}\right]$$

วิธีทำ: การคำนวณราคาอนุพันธ์เพื่อซื้อ (call options) Con't

Example

- เพื่อจะคำนวณค่าคาดหมายนี้ จำเป็นต้องแยกออกเป็นสองกรณีคือ
  1. กรณีที่ $S_T > K$ ซึ่งจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{T}Z} > K \Rightarrow Z > \frac{\ln \frac{K}{S_0} - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} \equiv \bar{z}_T$$

  2. กรณีที่ $S_T > K$ ซึ่งจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$Z < \frac{\ln \frac{K}{S_0} - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} \equiv \bar{z}_T$$

- ราคาอนุพันธ์เพื่อซื้อ (call options) ที่สามารถใช้สิทธิ์ได้ ณ เวลา T ที่ราคาอ้างอิง (strike price) K มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} C(K,T) &= e^{-rT}E\left[\max\{S_T - K, 0\}\right] = e^{-rT}\int_{\bar{z}_T}^{\infty}\left[S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{T}z} - K\right]\phi(z)\,dz \\ &= e^{-rT+\mu T}S_0\int_{\bar{z}_T}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z}\phi(z)\,dz - Ke^{-rT}\int_{\bar{z}_T}^{\infty}\phi(z)\,dz \end{aligned} \quad (15)$$

วิธีทำ: การคำนวณราคาอนุพันธ์เพื่อซื้อ (call options), Black-Scholes Model

Example

- พิจารณาการอินทิเกรตในพจน์แรกด้านขวา ดังนี้

$$\int_{\bar{z}_T}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z}\phi(z)\,dz = \int_{\bar{z}_T}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = e^{\frac{\sigma^2}{2}T}\int_{\bar{z}_T}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}\,dz$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{2}T}\int_{\bar{z}_T-\sigma\sqrt{T}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = e^{\frac{\sigma^2}{2}T}\left[1-\Phi\left(\bar{z}_T-\sigma\sqrt{T}\right)\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2}T}\Phi\left(\sigma\sqrt{T}-\bar{z}_T\right)$$

- เป็นผลมาจากการเปลี่ยนรูปให้เป็นกำลังสองสัมบูรณ์ ส่วนสมการที่สามเป็นผลมาจากการเปลี่ยนตัวแปรอินทิเกรตจาก z เป็น $z-\sigma\sqrt{T}$ และ สมการสุดท้ายเป็นผลมาจากคุณสมบัติความสมมาตรของการแจกแจงปกติมาตรฐาน เมื่อแทนค่ากลับเข้าไปในสมการราคาอนุพันธ์เพื่อซื้อ (call options) จะได้ว่า

$$C(K,T) = e^{-rT+\mu T}S_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}T}\Phi\left(\sigma\sqrt{T}-\bar{z}_T\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(-\bar{z}_T\right)$$

$$= e^{-rT+\mu T+\frac{\sigma^2}{2}T}\Phi\left(\sigma\sqrt{T}-\bar{z}_T\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(-\bar{z}_T\right)$$

$$C(K,T) = S_0\Phi\left(\sigma\sqrt{T}-\bar{z}_T\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(-\bar{z}_T\right)$$

เมื่อแทนค่า $\mu = r-\frac{\sigma^2}{2}$ และ $\bar{z}_T = \frac{\ln\frac{K}{S_0}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$

- สมการนี้คือสมการที่มีชื่อเสียงของ **Black-Scholes สำหรับการกำหนดราคาอนุพันธ์** (option pricing)

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของการแจกแจงปกติมาตรฐานหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

- สิ่งที่ขาดหายไปจากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของตัวแปรสุ่มตัวเดียว คือ **ความแปรปรวน (covariance) หรือสหสัมพันธ์ (correlation) ซึ่งจะปรากฏในกรณีที่มีตัวแปรหลายตัว**
- เริ่มจากตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐานที่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งเขียนแทนด้วยเวคเตอร์สุ่ม (random vector) $\boldsymbol{Z} = [Z_1, \ldots, Z_n]'$ โดยที่ $\boldsymbol{X}'$ หมายถึง เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของ $\boldsymbol{X}$ และ $Z_i \sim N(0,1)$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal) และเป็นอิสระต่อกัน (independent)
- นั่นคือตัวแปรสุ่มเหล่านี้มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (identically and independently distributed หรือ i.i.d.) ซึ่งในกรณีที่การแจกแจงเป็นแบบปกติมาตรฐาน สามารถเขียนแทนด้วย $\boldsymbol{Z} \sim N(\mathbf{0}, I_n)$
- ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของ $\boldsymbol{Z}$ คือ

$$f(\boldsymbol{z}) = \prod_{i=1}^{n} \phi(z_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z_i^2\right\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}\right\} \tag{16}$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของการแจกแจงปกติมาตรฐานหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

- สมการข้างต้นเป็นผลมาจากการที่ตัวแปรทั้งหมดมีการแจกแจงปกติมาตรฐานเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (i.i.d.)
- ชัดเจนว่า ค่าคาดหมาย (mean) และเมทริกซ์ของค่าความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) ของ Z มีค่าเท่ากับ $\mathbf{0}$ และ I_n ตามลำดับ
- ส่วนฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของ Z สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) &= E\left[\exp\left\{\mathbf{Z}'\mathbf{t}\right\}\right] = E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} Z_i t_i\right\}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{Z_i t_i\right\}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left\{Z_i t_i\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n}\psi_{z}(t_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{2}t_i^2} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{t}\right\}
\end{aligned} \tag{17}$$

- เราสามารถสร้างเวคเตอร์ของตัวแปรสุ่มปกติ (normal random vector) X ที่มีค่าคาดหมาย (mean) เท่ากับ $\boldsymbol{\mu}$ และเมทริกซ์ของค่าความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) เท่ากับ $\boldsymbol{\Sigma}$

การสร้างเวคเตอร์ของตัวแปรสุ่มปกติ (normal random vector) ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

- ในการสร้างเวคเตอร์ของตัวแปรสุ่มปกติ (normal random vector) จะคล้ายกับตัวแปรสุ่มตัวเดียวที่มีการแจกแจงปกติแบบมาตรฐาน แต่มี **ความยุ่งยากทางเทคนิค** ในการนิยามค่าความเบี่ยงเบนในรูปของเมทริกซ์ ซึ่งต้องใช้เทคนิคที่เรียกว่า **การแยกส่วนสเปกตรัล (spectral decomposition)**
- เริ่มจากคุณสมบัติที่สำคัญอันหนึ่งของเมทริกซ์ของค่าความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) $\boldsymbol{\Sigma}$ คือมันเป็น **เมทริกซ์จัตุรัสและสมมาตร (symmetric square matrix)** และ **คุณสมบัติเป็นบวกเกือบแน่นอน (positive semidefinite)** ซึ่งทำให้สามารถใช้หลักการทางพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra) แยกส่วน $\boldsymbol{\Sigma}$ ออกได้เป็น

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Gamma}^{'}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma} \tag{18}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Lambda}$ เป็นเมทริกซ์แนวทแยง (diagonal matrix)

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

และ $\boldsymbol{\Gamma}$ เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก (orthogonal matrix) นั่นคือ $\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \boldsymbol{\Gamma}^{'}$

- สรุปได้ว่า $\boldsymbol{\Gamma}^{'}\boldsymbol{\Gamma} = I$ โดยทั่วไปเพื่อความสะดวก เรามักจะเรียงลำดับ λ_i จากมากไปหาน้อย นั่นคือ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ และเรียก λ_i แต่ละตัวว่า ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ส่วนคอลัมน์ที่ i แต่ละอัน (สอดคล้องกับ λ_i) ซึ่งแทนด้วย $\boldsymbol{\gamma}_i$ มักเรียกว่าเวคเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector) ของ $\boldsymbol{\Sigma}$

การสร้างเวคเตอร์ของตัวแปรสุ่มปกติ (normal random vector) ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) Con’ t

- จากการที่ เราสามารถเขียนเมทริกซ์ของค่าความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) $\mathbf{\Sigma}$ ในรูปของค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) และเวคเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector) ได้ดังนี้

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Gamma}' \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i \gamma_i' \tag{20}$$

- ประโยชน์ที่สำคัญของการแยกส่วนนี้ก็คือ การได้มาซึ่งเมทริกซ์แนวทแยง (diagonal matrix) $\mathbf{\Lambda}$ ซึ่งค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) λ_i แต่ละค่ามีค่าไม่ติดลบ (nonnegative) ซึ่งช่วยให้สามารถนิยามรากที่สอง (square root) ของ $\mathbf{\Lambda}$ ได้เป็น

$$\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \tag{21}$$

- ซึ่งมีคุณสมบัติคล้ายกับรากกำลังสองของจำนวนจริง นั่นคือ

$$\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{\Lambda} \tag{22}$$

การสร้างเวคเตอร์ของตัวแปรสุ่มปกติ (normal random vector) ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) Con’ t

- เราสามารถเขียนสมการการแยกส่วนสเปกตรัล (spectral decomposition) ใหม่ได้เป็น

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Gamma}^{'} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Gamma} = \left(\mathbf{\Gamma}^{'} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Gamma}\right) \left(\mathbf{\Gamma}^{'} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Gamma}\right) \tag{23}$$

- ใช้คุณสมบัติการตั้งฉาก (orthogonal) ของเมทริกซ์ $\mathbf{\Gamma}$ นั่นคือ $\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^{'} = I$ ผลที่ตามมาจากสมการที่ 23 คือ ทำให้สามารถนิยามรากที่สอง (square root) ของ $\mathbf{\Sigma}$ ได้เป็น

$$\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{\Gamma}^{'} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Gamma} \tag{24}$$

- หากเมทริกซ์ของค่าความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) $\mathbf{\Sigma}$ เป็นบวกแน่นอน (positive definite หรือ p.d.) แล้วค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) มีค่าเป็นบวกทุกค่า นั่นคือ $\lambda_i > 0$ สำหรับทุกๆ $i = 1, \ldots, n$ ซึ่งมีผลทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของ $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ มีค่ามากกว่าศูนย์อย่างแน่นอน ทำให้สามารถหาเมทริกซ์ส่วนกลับ (inverse matrix) ของ $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ ได้ ดังนั้น จึงสามารถนิยามเมทริกซ์ส่วนกลับ (inverse matrix) ของ $\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$ ได้เป็น

$$\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{\Gamma}^{'} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{\Gamma} \tag{25}$$

โดยที่ $\mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$ แทนเมทริกซ์ส่วนกลับ (inverse matrix) ของ $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

- สร้างเวคเตอร์ของตัวแปรสุ่มปกติ (normal random vector) $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ที่มีค่าคาดหมาย (mean) เท่ากับ $\boldsymbol{\mu}$ และเมทริกซ์ของค่าความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) เท่ากับ $\boldsymbol{\Sigma}$ โดยกำหนดให้

$$X = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} Z + \boldsymbol{\mu} \tag{26}$$

- ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของ X เท่ากับ

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= E\left[\exp\left\{X^{'}t\right\}\right] = E\left[\exp\left\{\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}Z + \boldsymbol{\mu}\right)^{'} t\right\}\right] = \exp\left\{\boldsymbol{\mu}^{'}t\right\} E\left[\exp\left\{Z^{'}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}t\right)\right\}\right] \\ &= \exp\left\{\boldsymbol{\mu}^{'}t\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}t\right)^{'}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}t\right)\right\} = \exp\left\{\boldsymbol{\mu}^{'}t + \frac{1}{2}t^{'}\boldsymbol{\Sigma}t\right\}\end{aligned} \tag{27}$$

- ประยุกต์ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของ Z ในสมการที่ 17 โดยใช้ $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{t}$ แทน $\boldsymbol{t}$ สังเกตด้วยว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ในที่นี้สามารถหาค่าได้ตราบเท่าที่เมทริกซ์ของค่าความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นบวกเกือบแน่นอน (p.s.d.) ในขณะที่ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของ X จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นบวกแน่นอน (p.d.) ทั้งนี้เพราะการแปลงฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) จำเป็นต้องใช้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของ $\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

หาก $\mathbf{\Sigma}$ เป็นบวกแน่นอน (p.d.) แล้ว จะสามารถเขียนสมการที่ 26 ใหม่ได้เป็น

$$Z = \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \left(X - \boldsymbol{\mu} \right) \tag{28}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f.) ของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left| \det \mathbf{\Sigma} \right|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(x - \boldsymbol{\mu} \right)' \mathbf{\Sigma}^{-1} \left(x - \boldsymbol{\mu} \right) \right\} \tag{29}$$

ทฤษฎี: ความสัมพันธ์เชิงเส้นของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

Theorem

กำหนดให้ X เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรสุ่ม n ตัว ซึ่งมีการแจกแจงร่วมแบบปกติ นั่นคือ $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ และ $Y = AX + b$ โดยที่ A เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่ขนาด $m \times n$ และ b เป็นเวคเตอร์ของค่าคงที่ m ตัว แล้ว $Y \sim N\left(A\boldsymbol{\mu} + b, A\boldsymbol{\Sigma}A'\right)$

Proof.

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของ Y เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\psi_Y(t) &= E\left[\exp\left\{Y't\right\}\right] = E\left[\exp\left\{(AX+b)'t\right\}\right] \\
&= \exp\left\{b't\right\} E\left[\exp\left\{X'\left(A't\right)\right\}\right] = \exp\left\{b't\right\}\exp\left\{\boldsymbol{\mu}'\left(A't\right) + \frac{1}{2}\left(A't\right)'\boldsymbol{\Sigma}\left(A't\right)\right\} \\
&= \exp\left\{(A\boldsymbol{\mu}+b)'t + \frac{1}{2}t'\left(A\boldsymbol{\Sigma}A'\right)t\right\}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $Y \sim N\left(A\boldsymbol{\mu} + b, A\boldsymbol{\Sigma}A'\right)$ □

ประโยชน์ในการแปลงตัวแปรสุ่มในรูปแบบฟังก์ชันเชิงเส้น (linear transformation)

- ทฤษฎีบทด้านบนยังช่วยให้สามารถหาการแจกแจงของตัวแปรสุ่มเพียงบางส่วนในกรณีที่การแจกแจงร่วมเป็นแบบปกติ โดยเริ่มจากการที่สามารถแบ่งเวคเตอร์ X ออกได้เป็นสองส่วน คือ

$$X = \begin{bmatrix} X_m \\ X_k \end{bmatrix} \tag{30}$$

โดยที่ X_m คือเวคเตอร์ของตัวแปรสุ่มที่สนใจ โดยในที่นี้กำหนดให้มีขนาด m ในขณะที่ตัวแปรสุ่ม X_k มีขนาด $k = n - m$

- กำหนดให้ $b = \mathbf{0}$ และ

$$A = \begin{bmatrix} I_{mm} & \mathbf{0}_{mk} \\ \mathbf{0}_{km} & \mathbf{0}_{kk} \end{bmatrix} \tag{31}$$

จะทำให้ฟังก์ชันที่เกิดจากการแปลงค่าโดยใช้ A และ b เท่ากับ

$$Y = \begin{bmatrix} I_{mm} & \mathbf{0}_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ X_k \end{bmatrix} = X_m$$

สรุป: การแปลงตัวแปรสุ่มในรูปแบบฟังก์ชันเชิงเส้น (linear transformation)

- เราสามารถแบ่ง ค่าคาดหมาย (mean) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) ของ X ได้เป็น

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_m \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{bmatrix} \tag{32}$$

และ

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{mm} & \boldsymbol{\Sigma}_{mk} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{km} & \boldsymbol{\Sigma}_{kk} \end{bmatrix} \tag{33}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Sigma}_{mk}$ คือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) ระหว่าง X_m และ X_k

- ค่าคาดหมาย (mean) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) ของ Y สามารถแบ่งส่วนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} I_{mm} & \mathbf{0}_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_m \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}_m \tag{34}$$

และ

$$\begin{bmatrix} I_{mm} & \mathbf{0}_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{mm} & \boldsymbol{\Sigma}_{mk} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{km} & \boldsymbol{\Sigma}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{mm} \\ \mathbf{0}_{mk} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}_{mm} \tag{35}$$

- สรุปได้ว่า $Y = X_m \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_m, \boldsymbol{\Sigma}_{mm}\right)$ กล่าวคือ การแจกแจงร่วมเป็นแบบปกติ แล้วการแจกแจงของตัวแปรสุ่มบางส่วนก็จะมีการแจกแจงปกติเช่นกัน โดยที่ค่าคาดหมาย (mean) และค่าความแปรปรวน (variance) ของชุดตัวแปรบางส่วนสามารถหาได้จากค่าสถิติของตัวแปรสุ่มทั้งหมดได้ไม่ยากนัก

ตัวอย่าง: การหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วม (p.d.f.) ของ X_1 และ X_2

Example

พิจารณาตัวแปรสุ่มสองตัว X_1 และ X_2 ที่มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (μ_1, μ_2) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า det $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)$ โดยที่ ρ แทนค่าสหสัมพันธ์ระหว่าง X_1 และ X_2 ดังนั้น ส่วนกลับ (inverse) ของ $\boldsymbol{\Sigma}$ เท่ากับ

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

- สามารถคำนวณได้ว่า

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) &= [x_1-\mu_1, x_2-\mu_2]\,\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\end{aligned}$$

วิธีทำ: การหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วม (p.d.f.) ของ X_1 และ X_2

Example

- ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วม (p.d.f.) ของ X_1 และ X_2 คือ

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{Q}{2}} \tag{36}$$

  โดยที่

$$Q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] \tag{37}$$

- ถ้า $\rho = 0$ แล้ว ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วม (p.d.f.) ของ X_1 และ X_2 คือ

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}\right] = f_1(x_1) f_2(x_2) \end{aligned}$$

- หมายความว่า X_1 และ X_2 เป็นอิสระต่อกัน กล่าวคือ ในกรณีของการแจกแจงปกติ (normal distribution) การไม่มีสหสัมพันธ์ (uncorrelated) หมายถึงการเป็นอิสระต่อกัน (independent) ด้วย

ทฤษฎี: ความเป็นอิสระต่อกัน (independent) ของตัวแปรสุ่ม

Theorem

กำหนดให้ $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ และสามารถแยกส่วนได้เป็นสองส่วนคือ $X = (X_m, X_k)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ 30, 32, และ 33 ดังนั้น X_m และ X_k เป็นอิสระต่อกัน (independent) ก็ต่อเมื่อ (if and only if) $\boldsymbol{\Sigma}_{mk} = \mathbf{0}$

Proof.

พิจารณาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (m.g.f.) ของ X ในรูปของ t_m และ t_k

$$\begin{aligned}\psi(t_m, t_k) &= \exp\left\{\boldsymbol{\mu_m}'t_m + \boldsymbol{\mu_k}'t_k + \frac{1}{2}\left[t_m'\boldsymbol{\Sigma}_{mm}t_m + t_k'\boldsymbol{\Sigma}_{mm}t_k + t_m'\boldsymbol{\Sigma}_{mk}t_k + t_k'\boldsymbol{\Sigma}_{km}t_m\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\boldsymbol{\mu_m}'t_m + \boldsymbol{\mu_k}'t_k + \frac{1}{2}\left[t_m'\boldsymbol{\Sigma}_{mm}t_m + t_k'\boldsymbol{\Sigma}_{mm}t_k\right]\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\left[t_m'\boldsymbol{\Sigma}_{mk}t_k + t_k'\boldsymbol{\Sigma}_{km}t_m\right]\right\} \qquad (38)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(t_m, t_k) &= \exp\left\{\boldsymbol{\mu_m}'t_m + \frac{1}{2}\left[t_m'\boldsymbol{\Sigma}_{mm}t_m\right]\right\}\exp\left\{\boldsymbol{\mu_k}'t_k + \frac{1}{2}\left[t_k'\boldsymbol{\Sigma}_{mm}t_k\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\boldsymbol{\mu_m}'t_m + \boldsymbol{\mu_k}'t_k + \frac{1}{2}\left[t_m'\boldsymbol{\Sigma}_{mm}t_m + t_k'\boldsymbol{\Sigma}_{mm}t_k\right]\right\} \qquad (39)\end{aligned}$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\left[t_m'\boldsymbol{\Sigma}_{mk}t_k + t_k'\boldsymbol{\Sigma}_{km}t_m\right]\right\} = 1 \Rightarrow t_m'\boldsymbol{\Sigma}_{mk}t_k + t_k'\boldsymbol{\Sigma}_{km}t_m = 0$$

ซึ่งจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{\Sigma}_{mk} = \boldsymbol{\Sigma}_{km}' = \mathbf{0}$ □

ทฤษฎี: การแจกแจงแบบมีเงื่อนไข (conditional distribution) เป็นการแจกแจงแบบปกติ (normal)

Theorem

กำหนดให้ $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ และสามารถแยกส่วนได้เป็นสองส่วนคือ $X = (X_m, X_k)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ 30, 32, และ 33 และสมมุติว่า $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นบวกแน่นอน (positive definite) ดังนั้น การแจกแจงแบบมีเงื่อนไข (conditional distribution) ของ X_m เมื่อทราบ X_k เป็นแบบปกติ (normal) นั่นคือ

$$X_m \big| X_k \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_m + \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\left(X_k - \boldsymbol{\mu}_k\right), \boldsymbol{\Sigma}_{mm} - \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{km}\right) \tag{40}$$

การพิสูจน์: การแจกแจงแบบมีเงื่อนไข (conditional distribution) เป็นการแจกแจงแบบปกติ (normal)

Proof.

- กำหนดให้ $W = X_m - \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}X_k$ และ

$$\begin{bmatrix} W \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -\boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1} \\ \mathbf{0} & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

- คำนวณหาเมทริกซ์ของค่าความแปรปรวน (variance-covariance matrix) ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} I_m & -\boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1} \\ \mathbf{0} & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{mm} & \boldsymbol{\Sigma}_{mk} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{km} & \boldsymbol{\Sigma}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1} & I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{mm} - \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{km} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{kk} \end{bmatrix}$$

- เห็นได้ว่า W และ X_k เป็นอิสระต่อกัน (independent) ดังนั้น **การแจกแจงแบบมีเงื่อนไข $W|X_k$ จะเหมือนกับการแจกแจงของ W** ซึ่งเป็นการแจกแจงปกติ (normal distribution) ด้วยค่าคาดหมาย (mean) เท่ากับ $\boldsymbol{\mu}_m - \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\boldsymbol{\mu}_k$ และสามารถสรุปได้ว่า

$$W|X_k \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_m - \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_{mm} - \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{km}\right)$$

- ในขณะเดียวกัน เนื่องจากสิ่งที่เราสนใจคือการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขเมื่อทราบ X_k ดังนั้น การบวกเพิ่มด้วยฟังก์ชันของ X_k เข้าไปย่อม**มีผลต่อเช่นเดียวกับการบวกเพิ่มด้วยค่าคงที่** ซึ่งมีผลต่อค่าคาดหมาย แต่**ไม่มีผลต่อค่าความแปรปรวน**
- เราสามารถคำนวณหา X_m ได้จาก $W + \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}X_k = X_m$ ดังนั้น การแจกแจงแบบมีเงื่อนไข (conditional distribution) ของ X_m เมื่อทราบ X_k เท่ากับ

$$X_m|X_k \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_m - \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\boldsymbol{\mu}_k + \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}X_k, \boldsymbol{\Sigma}_{mm} - \boldsymbol{\Sigma}_{mk}\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{km}\right)$$

ตัวอย่าง: การคำนวณหาค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข (conditional mean)

Example

เช่นเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว สมมุติให้ตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 มีการแจกแจงปกติ (normally distributed) ด้วยค่าคาดหมาย (μ_1, μ_2) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

- ใช้สมการที่ 40 เพื่อคำนวณหาค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข (conditional mean) ของ X_1 เมื่อทราบ $X_2 = x_2$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} E\left[X_1 | X_2 = x_2\right] &= \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(X_2 - \boldsymbol{\mu}_2\right) = \mu_1 + \left(\rho\sigma_1\sigma_2\right)\left(\sigma_2^2\right)^{-1}\left(x_2 - \mu_2\right) \\ &= \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(x_2 - \mu_2\right) \end{aligned}$$

- ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ของ x_2 สังเกตว่าเราไม่ได้กำหนดหรือบังคับให้ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไข (conditional mean) นี้มีความสัมพันธ์เชิงเส้นแต่อย่างใด แต่คุณสมบัติของการแจกแจงปกติ นอกจากนี้ ยังสามารถเขียนในรูปของตัวแปรสุ่มได้เป็น

$$E\left[X_1 | X_2\right] = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(X_2 - \mu_2\right) \tag{41}$$