การทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis Testing)

รศ.ดร. วีระชาติ กิเลนทอง
มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

บทนำ

- หัวข้อนี้นำเสนอหลักการและวิธีการที่เกี่ยวข้องกับการทดสอบสมมุติฐาน โดยให้ความสำคัญกับหลักการต่อไปนี้
  - การทดสอบสมมุติฐานด้วยค่าสถิติที่มีการแจกแจงแบบที (t tests)
  - การทดสอบสมมุติฐานด้วยค่าสถิติที่มีการแจกแจงแบบเอฟ (F tests)

หลักการสำคัญ: เราทดสอบด้วยการแจกแจงแบบทีเพราะค่าสถิติที่ใช้มีการแจกแจงแบบที

- ประเด็นสำคัญคือ การแจกแจงของค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานขึ้นอยู่กับรูปแบบของค่าสถิติ ไม่ใช่การจดจำว่าการทดสอบสมมุติฐานแบบใดใช้การแจกแจงแบบที
- หากค่าสถิติอยู่ในรูปแบบที่ตัวส่วนมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานและตัวหารเท่ากับรากที่สองของตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบไคว์กำลังสองแล้ว ค่าสถิตินั้นก็จะมีการแจกแจงแบบที
- การทดสอบที่ใช้ค่าสถิตินั้นต้องอ้างอิงกับการแจกแจงแบบที

การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกด้านเดียว (one-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

- พิจารณาสมมุติฐานด้านเดียว (one-sided hypothesis) ที่เกี่ยวกับค่าคาดหมาย μ ของการแจกแจงแบบปกติที่มีพารามิเตอร์ $\left(\mu, \sigma^2\right)$ โดยที่ไม่ทราบว่าค่าความแปรปรวนที่แท้จริง σ^2 มีค่าเท่าใด

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ และ } H_1 : \mu > \mu_0 \tag{1}$$

- เรามักนิยมใช้ค่าสถิติ

$$U = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu_0\right)}{\hat{\sigma}}, \tag{2}$$

โดยที่ $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ หมายถึงค่าคาดหมายตัวอย่าง (sample mean) และ $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}}$ หมายถึงตัวประมาณค่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation estimator)

- ประเด็นสำคัญก็คือว่า ถ้า $\mu = \mu_0$ ตัวส่วน $\bar{X}_n \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ และ $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกด้านเดียว (one-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

- เราสามารถเขียนค่าสถิติ U ในรูปแบบใหม่ได้เป็น

$$U = \frac{\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}} = \frac{\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \equiv \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} \sim t_{n-1}, \tag{3}$$

- ประเด็นสำคัญ: Z มีการแจกแจงปกติมาตรฐานและ Y มีการแจกแจงแบบ χ^2_{n-1}
- ดังนั้น U มีการแจกแจงแบบทีที่ระดับความอิสระ (d.o.f) $n-1$
- กระบวนการทดสอบสมมุติฐาน (1) ที่ใช้ค่าสถิติ U มักจะอยู่ในรูปแบบที่ว่า จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $U \geq c$ สำหรับค่าวิกฤติ c ที่กำหนดให้ คำถามต่อมาก็คือ ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) ของกระบวนการทดสอบนี้มีคุณสมบัติอย่างไรบ้าง?

ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) สำหรับ $H_0 : \mu \leq \mu_0$

Theorem

กำหนดให้ $X_1, \ldots, X_n$ *เป็นตัวอย่างสุ่มที่สุ่มเลือกมาจากการแจกแจง* $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ *และกำหนดให้* U *เป็นค่าสถิติที่สอดคล้องกับสมการ (2) และแทนค่าวิกฤติสำหรับการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ* α_0 *ด้วย* $c = T_{n-1}^{-1}\left(1-\alpha_0\right)$ *โดยที่* $T_{n-1}\left(t\right)$ *คือฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของการแจกแจงแบบทีที่ระดับความอิสระ (d.o.f)* $n-1$ *ดังนั้น ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function)* $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right)$ *สำหรับกระบวนการทดสอบ* δ *ที่ทดสอบสมมุติฐาน* $H_0 : \mu \leq \mu_0$ *ซึ่งจะปฏิเสธ* H_0 *ถ้า* $U \geq c$ *มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้*

1. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) = \alpha_0$ *เมื่อ* $\mu = \mu_0$
2. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) < \alpha_0$ *เมื่อ* $\mu < \mu_0$
3. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) > \alpha_0$ *เมื่อ* $\mu > \mu_0$
4. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) \to 0$ *เมื่อ* $\mu \to -\infty$
5. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) \to 1$ *เมื่อ* $\mu \to \infty$

และกระบวนการทดสอบนี้มีขนาดการทดสอบเท่ากับ α_0

พิสูจน์: การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกด้านเดียว (one-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

Proof.

1. ส่วนนี้เป็นการพิสูจน์คุณสมบัติที่ว่า ถ้า $\mu = \mu_0$ แล้ว $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) = \alpha_0$ การที่ทราบว่า $\mu = \mu_0$ และทราบค่า σ ช่วยให้สามารถสรุปได้ว่า $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ และ $Y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ ดังนั้น ในกรณีนี้ค่าสถิติ $U \sim t_{n-1}$ ดังนั้น ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function)

$$\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) = Pr\left(U \geq c | \mu_0, \sigma^2\right) = 1 - T_{n-1}\left(T_{n-1}^{-1}(1 - \alpha_0)\right) = \alpha_0 \tag{4}$$

2. สำหรับการพิสูจน์คุณสมบัติที่ว่า $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) < \alpha_0$ เมื่อ $\mu < \mu_0$ เราจะเริ่มจากการแบ่งส่วน $U = U^* - W^*$ โดยที่

$$U^* = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)}{\hat{\sigma}} \sim t_{n-1}, \tag{5}$$

$$W^* = \frac{\sqrt{n}\left(\mu_0 - \mu\right)}{\hat{\sigma}} \tag{6}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า เราไม่สามารถสรุปได้ว่า U มีการแจกแจงแบบที เพราะว่า $E\left[\bar{X}_n - \mu_0\right] \neq 0$ ภายใต้เงื่อนไขที่ $\mu < \mu_0$ นอกจากนี้ เงื่อนไขดังกล่าวยังทำให้สรุปได้ว่า $W^* > 0$ เราสามารถคำนวณฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) &= Pr\left(U \geq c | \mu_0, \sigma^2\right) = Pr\left(U^* - W^* \geq c | \mu_0, \sigma^2\right) \\ &= Pr\left(U^* \geq c + W^* | \mu_0, \sigma^2\right) < Pr\left(U^* \geq c | \mu_0, \sigma^2\right) = \alpha_0\end{aligned} \tag{7}$$

พิสูจน์: การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกด้านเดียว (one-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

Proof.

1. การพิสูจน์คุณสมบัติที่ว่า $\pi\left(\mu, \sigma^2|\delta\right) > \alpha_0$ เมื่อ $\mu > \mu_0$ คล้ายคลึงกับการพิสูจน์ในข้อที่ 2 เพียงแต่ค่า $W^* < 0$ ดังนั้นข้อสรุปที่ได้จึงกลับด้าน
2. การพิสูจน์คุณสมบัติที่ว่า $\pi\left(\mu, \sigma^2|\delta\right) \to 0$ เมื่อ $\mu \to -\infty$ อาศัยการแยกส่วน $U = U^* - W^*$ โดยใช้ข้อสรุปที่ว่า เมื่อ $W^* \to \infty$ เมื่อ $\mu \to -\infty$ ดังนั้น

$$\pi\left(\mu, \sigma^2|\delta\right) = Pr\left(U \geq c|\mu_0, \sigma^2\right) = Pr\left(U^* \geq c + W^*|\mu_0, \sigma^2\right) \to 0$$

เนื่องจากความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มใดๆ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ ∞ เท่ากับศูนย์

□

พิสูจน์: การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกด้านเดียว (one-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

Proof.

1. การพิสูจน์คุณสมบัติที่ว่า $\pi\left(\mu, \sigma^2|\delta\right) \to 1$ เมื่อ $\mu \to \infty$ อาศัยการแยกส่วน $U = U^* - W^*$ โดยใช้ข้อสรุปที่ว่า เมื่อ $W^* \to -\infty$ เมื่อ $\mu \to \infty$ ดังนั้น

$$\pi\left(\mu, \sigma^2|\delta\right) = Pr\left(U \geq c|\mu_0, \sigma^2\right) = Pr\left(U^* \geq c + W^*|\mu_0, \sigma^2\right) \to 1$$

เนื่องจากความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มใดๆ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $-\infty$ เท่ากับหนึ่ง

นอกจากนี้ คุณสมบัติที่ 1 ถึง 2 รวมกันหมายความว่า สำหรับ $\mu \in \Omega_0$ ใดๆ

$$\pi\left(\mu, \sigma^2|\delta\right) \leq \alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = \sup_{\mu \in \Omega_0} \pi\left(\mu, \sigma^2|\delta\right) \tag{8}$$

ซึ่งก็คือขนาดการทดสอบนั่นเอง □

ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) สำหรับ $H_0 : \mu \geq \mu_0$

Theorem

กำหนดให้ $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มที่สุ่มเลือกมาจากการแจกแจง $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ และกำหนดให้ U เป็นค่าสถิติที่สอดคล้องกับสมการ (2) และแทนค่าวิกฤติสำหรับการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ α_0 ด้วย $c = T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$ ดังนั้น ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right)$ สำหรับกระบวนการทดสอบ δ ที่ทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ซึ่งจะปฏิเสธ H_0 ถ้า $U \leq c$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) = \alpha_0$ *เมื่อ* $\mu = \mu_0$
2. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) > \alpha_0$ *เมื่อ* $\mu < \mu_0$
3. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) < \alpha_0$ *เมื่อ* $\mu > \mu_0$
4. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) \to 1$ *เมื่อ* $\mu \to -\infty$
5. $\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) \to 0$ *เมื่อ* $\mu \to \infty$

และกระบวนการทดสอบนี้มีขนาดการทดสอบเท่ากับ α_0

ทฤษฎี: p-value ของฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของการแจกแจงแบบทีที่ระดับความอิสระ (d.o.f) $n-1$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้นำเสนอสูตรสำหรับการคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมุติฐานจริง (p-value) สำหรับการทดสอบสมมุติฐานด้วยค่าสถิติที่มีการแจกแจงแบบที

Theorem

กำหนดให้ u คือค่าสถิติ U ที่คำนวณได้จากข้อมูลที่มีอยู่ตามสมการที่ (2) และ $T_{n-1}(t)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของการแจกแจงแบบทีที่ระดับความอิสระ (d.o.f) $n-1$ ดังนั้น

1. *p-value สำหรับสมมุติฐาน $H_0 : \mu \leq \mu_0$ เท่ากับ $p = 1 - T_{n-1}(u)$*
2. *p-value สำหรับสมมุติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0$ เท่ากับ $p = T_{n-1}(u)$*

พิสูจน์: p-value ของฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของการแจกแจงแบบทีที่ระดับความอิสระ (d.o.f) $n-1$

Proof.

พิจารณาสำหรับสมมุติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0$ เราจะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α_0 ก็ต่อเมื่อค่าสถิติที่คำนวณได้จากข้อมูลที่มีอยู่

$$u \geq T_{n-1}^{-1}\left(1-\alpha_0\right) \Rightarrow T_{n-1}\left(u\right) \geq 1-\alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 \geq 1-T_{n-1}\left(u\right)$$

ซึ่งอาศัยคุณสมบัติการเพิ่มขึ้นของฟังก์ชัน $T_{n-1}\left(u\right)$ ดังนั้น ค่าระดับนัยสำคัญที่ต่ำที่สุดที่ยังสามารถปฏิเสธ H_0 จึงมีค่าเท่ากับ $1-T_{n-1}\left(u\right)$ เราสามารถประยุกต์ใช้เหตุผลในทำนองเดียวกันเพื่อพิสูจน์ว่า p-value สำหรับสมมุติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0$ เท่ากับ $p = T_{n-1}\left(u\right)$ $\square$

ตัวอย่าง: การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกด้านเดียว (one-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

- พิจารณาผลตอบแทนสุทธิรายเดือนของกองทุนรวม K-USXNDQ, R, ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าคาดหมาย μ และค่าความแปรปรวน σ^2
- สมมุติฐานที่ต้องการทดสอบคือ $H_0 : \mu \geq 0.01$ และ $H_1 : \mu < 0.01$
- การทดสอบในครั้งนี้จะใช้การทดสอบสมมุติฐานโดยใช้ค่าสถิติ

$$U = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{R}_n - 0.01\right)}{\hat{\sigma}},$$

- จากข้อมูลจำนวน $n = 24$ เดือน ระหว่างมค. 2561 ถึงเดือนธค. 2562 ค่าเฉลี่ยผลตอบแทนสุทธิรายเดือน $\bar{r}_n = 0.01093$ และค่าประมาณของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\hat{\sigma} = 0.00246$ ดังนั้น ค่าสถิติจากข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ $U = 1.847$
- ดังนั้น เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha_0 = 0.05$ เพราะ $u > T_{23}^{-1}(0.05) = -1.714$
- นอกจากนี้ เราสามารถคำนวณหาค่า p-value สำหรับกรณีนี้ได้จาก $p = T_{n-1}(u) = T_{23}(1.847) = 0.9612$

ตัวอย่าง: การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกด้านเดียว (one-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

- หากเราสนใจทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \mu \leq 0.01$ และ $H_1 : \mu < 0.01$ แทน
- ซึ่งใช้ค่าสถิติอันเดียวกันคือ

$$U = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{R}_n - 0.01\right)}{\hat{\sigma}},$$

- จากข้อมูลจำนวน $n = 24$ เดือน ระหว่างมค. 2561 ถึงเดือนธค. 2562 ค่าเฉลี่ยผลตอบแทนสุทธิรายเดือน $\bar{r}_n = 0.01093$ และค่าประมาณของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\hat{\sigma} = 0.00246$ ดังนั้น ค่าสถิติจากข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ $U = 1.847$
- ดังนั้น เราปฏิเสธสมมุติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha_0 = 0.05$ เพราะ $u > T_{23}^{-1}(0.95) = 1.714$
- นอกจากนี้ เราสามารถคำนวณหาค่า p-value สำหรับกรณีนี้ได้จาก $p = 1 - T_{n-1}(u) = 1 - T_{23}(1.847) = 0.0388$

การแจกแจงแบบทีที่ตรงกลางไม่เท่ากับศูนย์ (noncentral t distribution)

- การคำนวณหาค่าฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) สำหรับสมมุติฐานด้านเดียว (one-sided hypothesis) นั้นทำได้ค่อนข้างลำบาก (ยกเว้นในกรณีของ $\mu = \mu_0$) เนื่องจาก ค่าคาดหมายของ $\bar{X}_n - \mu_0$ ไม่ได้เท่ากับศูนย์สำหรับทุกค่าของ $\mu \in \Omega_0$ (ยกเว้นในกรณีของ $\mu = \mu_0$)
- ทำให้ต้องใช้การแจกแจงแบบทีที่ตรงกลางไม่เท่ากับศูนย์ (noncentral t distribution)
- กำหนดให้ W และ Y เป็นตัวแปรสุ่มทีเป็นอิสระต่อกัน โดยที่ $W \sim N(\psi, 1)$ และ $Y \sim \chi^2_m$ ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม

$$X = \frac{W}{\sqrt{\frac{Y}{m}}} \tag{9}$$

มีการแจกแจงแบบทีที่ตรงกลางไม่เท่ากับศูนย์ (noncentral t distribution) ด้วยระดับความอิสระ (d.o.f) m และค่าตรงกลางต่างจากศูนย์ (noncentral parameter) ψ

- กำหนดให้ $T_m(t|\psi) = Pr(X \leq t)$ แทนฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของการแจกแจงนี้

ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) และการแจกแจงแบบทีที่ตรงกลางไม่เท่ากับศูนย์ (noncentral t distribution)

Theorem

กำหนดให้ $X_1, \ldots, X_n$ *เป็นตัวอย่างสุ่มที่มาจาก* $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ *ดังนั้น การแจกแจงของ*

$$U = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu_0\right)}{\hat{\sigma}}, \tag{10}$$

เป็นแบบทีที่ตรงกลางไม่เท่ากับศูนย์ (noncentral t distribution) ด้วยระดับความอิสระ (d.o.f) $n-1$ *และค่าตรงกลางต่างจากศูนย์ (noncentral parameter)* $\psi = \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}$ *และ*

1. *ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติสำหรับสมมุติฐาน* $H_0 : \mu \leq \mu_0$ *ที่ปฏิเสธ* H_0 *เมื่อ* $U \geq c$ *เท่ากับ*

$$\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) = 1 - T_{n-1}\left(c|\psi\right) \tag{11}$$

2. *ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติสำหรับสมมุติฐาน* $H_0 : \mu \geq \mu_0$ *ที่ปฏิเสธ* H_0 *เมื่อ* $U \leq c$ *เท่ากับ*

$$\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) = T_{n-1}\left(c|\psi\right) \tag{12}$$

ตัวอย่าง: การเลือกขนาดของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function)

- พิจารณาสมมุติฐาน $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ที่ปฏิเสธ H_0 เมื่อ $U \geq c$
- กำหนดให้ระดับนัยสำคัญ $\alpha_0 = 0.05$ และตัวอย่างจำนวน $n = 15$ ดังนั้น $c = T_{14}^{-1}(0.95) = 1.761$
- ค่าฟังก์ชันอำนาจทางสถิติในกรณีนี้ได้จาก $1 - T_{n-1}(1.761|\psi)$
- ค่าอำนาจทางสถิติสำหรับค่า $\mu = \mu_0 + \frac{\sigma}{2}$ (สนใจค่าที่หากจากเป้าหมาย 0.5 เท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน) ได้โดยเริ่มจากการคำนวณหาค่า $\psi = \frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{\sigma} = \frac{\sqrt{15}\left(\mu_0+\frac{\sigma}{2}-\mu_0\right)}{\sigma} = \frac{\sqrt{15}}{2} = 1.936$
- ดังนั้น ค่าอำนาจทางสถิติในกรณีนี้เท่ากับ $\pi\left(\mu = \mu_0 + \frac{\sigma}{2}, \sigma^2 | \delta\right) = 1 - T_{14}(1.761|1.936) = 1 - 0.422 = 0.578$

ตัวอย่าง: การเลือกขนาดของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function)

- เราสามารถหาขนาดของตัวอย่าง n ที่ทำให้ได้ค่าอำนาจทางสถิติ (power) ณ ค่าพารามิเตอร์ $\mu = \mu_0 + \frac{\sigma}{2}$ เท่ากับ $\bar{\pi} = 0.8$ โดยแก้สมการต่อไปนี้

$$\bar{\pi} = 1 - T_{n-1}\left(T_{n-1}^{-1}(1-\alpha_0) \,|\, \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right) = 0.8$$

- การประมาณค่า: เนื่องจาก $\alpha_0 = 0.05$ ดังนั้น

$$\bar{\pi} = 1 - T_{n-1}\left(T_{n-1}^{-1}(0.95) \,|\, \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.8$$

- สมมุติว่า ต้องการค่าอำนาจทางสถิติสำหรับค่า เท่ากับ $\bar{\pi} = 0.8$ หาค่า n ด้วยวิธี trial and error ดังต่อไปนี้
    1. ถ้า $n = 26$ จะได้ว่า $1 - T_{25}\left(T_{25}^{-1}(0.95) \,|\, \frac{\sqrt{26}}{2}\right) = 0.7982$ ซึ่งยังต่ำกว่าเป้าหมาย
    2. ทดลองใช้ $n = 27$ จะได้ว่า $1 - T_{26}\left(T_{26}^{-1}(0.95) \,|\, \frac{\sqrt{27}}{2}\right) = 0.8117$
    3. เราควรมีกลุ่มตัวอย่างของเราควรมีขนาดไม่น้อยกว่า $n = 27$

การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกสองด้าน (two-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

- พิจารณาสมมุติฐาน

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ และ } H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{13}$$

- ค่าสถิติที่นิยมใช้ในการทดสอบ

$$U = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu_0\right)}{\hat{\sigma}}, \tag{14}$$

- การทดสอบจะปฏิเสธ H_0 ถ้า $|U| \geq c$
- เนื่องจากภายใต้สมมุติฐานว่าง $H_0 : \mu = \mu_0$ ค่าสถิติ U จะมีการแจกแจงแบบทีที่ตรงกลางเท่ากับศูนย์
- ดังนั้น สำหรับการทดสอบที่ต้องการระดับนัยสำคัญ α_0 ด้วยกลุ่มตัวอย่าง n ตัวอย่าง ค่าคงที่ $c = T_{n-1}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right)$

ตัวอย่าง: การทดสอบสมมุติฐานทางเลือกสองด้าน (two-sided alternative) โดยที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

- ตัวอย่างนี้ทดสอบสมมุติฐาน

$$H_0 : \mu = 0.01 \text{ และ } H_1 : \mu \neq 0.01$$

  โดยใช้ข้อมูลชุดเดียวกันกับตัวอย่างก่อนหน้านี้
- ค่าเฉลี่ยของผลตอบแทนสุทธิรายเดือนของกองทุนรวม K-USXNDQ $\bar{r}_n = 0.01093$ และค่าประมาณของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\hat{\sigma} = 0.00246$
- ภายใต้สมมุติฐานว่าง $H_0 : \mu = 0.01$ ค่าสถิติ $U = \frac{\sqrt{n}(\bar{r}_n - 0.01)}{\hat{\sigma}}$ จะมีการแจกแจงแบบทีที่ตรงกลางเท่ากับศูนย์
- ดังนั้น ค่าวิกฤติสำหรับการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha_0 = 0.05$ เท่ากับ $c = T_{23}^{-1}(0.975) = 2.0687$ ส่วนค่าสถิติ $u = 1.847$ ดังนั้น เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha_0 = 0.05$

ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) และ p-value สำหรับการทดสอบสมมุติฐานทางเลือกสองด้าน (two-sided alternative)

- ฟังก์ชันอำนาจทางสถิติ (power function) สำหรับค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริง μ_1 สำหรับการทดสอบสอบสมมุติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$

$$\pi\left(\mu, \sigma^2 | \delta\right) = T_{n-1}\left(-c|\psi\right) + 1 - T_{n-1}\left(c|\psi\right) \tag{15}$$

  โดยที่ $c = T_{n-1}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right)$ และ $\psi = \frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{\sigma}$

- ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมุติฐานจริง (p-value) สำหรับการทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ ที่ระดับนัยสำคัญ α_0 เท่ากับ $p = 2\left[1 - T_{n-1}\left(|u|\right)\right]$ โดยที่ u คือค่าสถิติ U ที่คำนวณได้จากข้อมูลที่มีอยู่ตามสมการที่ (2) และ $T_{n-1}\left(t\right)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของการแจกแจงแบบทีที่ระดับความอิสระ (d.o.f) $n-1$

การทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$: F-test

- พิจารณาสมมุติฐาน

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \text{ และ } H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

- ค่าสถิติที่นิยมใช้ในการทดสอบสสมมุติฐานแบบนี้คือ

$$U = \frac{\frac{S_X^2}{m-1}}{\frac{S_Y^2}{n-1}}$$

โดยที่ $S_X^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}}$ และ $S_Y^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2}{n-1}}$ และ m และ n คือขนาดตัวอย่างของ X และ Y ตามลำดับ

- ประเด็นสำคัญก็คือ ถ้า X และ Y มีการแจกแจงแบบปกติ

$$\frac{S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi_{m-1}^2 \text{ และ } \frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi_{n-1}^2 \Rightarrow \frac{\frac{S_X^2}{\sigma_X^2(m-1)}}{\frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2(n-1)}} \sim F_{m-1,n-1}$$

การทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$: F-test

- ภายใต้พิจารณาสมมุติฐาน $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ เราจึงสามารถสรุปได้ว่า

$$\frac{\frac{S_X^2}{(m-1)}}{\frac{S_Y^2}{(n-1)}} \sim F_{m-1,n-1}$$

- ประเด็นสำคัญก็คือ เราจะใช้การแจกแจงแบบใดในการทดสอบสมมุติฐานอันใด ก็ขึ้นอยู่กับว่า เราใช้ค่าสถิติแบบใดในการทดสอบสมมุติฐานนั้น